

译 序

现在奉献给读者的《模态分析理论与试验》一书是根据《Modal Analysis Theory and Testing》(1999 年版)翻译的。原书作者是比利时卢温大学著名动力学教授,这是他们增删多次的最新一部力作。

本书分上下两篇:上篇讲理论,下篇讲实践。讲理论,简洁明了,深广结合;讲实践,现实中肯,有根有据。全书特别注重理论与实践紧密结合。因此,本书非常适合想在理论上有所提高的实验工程师阅读。当然,对于有关专业的工程技术人员及大专院校的教师和学生,该书都有一定的参考价值。

译者从事结构模态实验与分析多年,但总感到自己的理论不够系统,个人的经验往往跟不上这一领域中理论与实践的飞速发展。充实自己,紧紧跟随模态分析技术前进的步伐,是我们翻译出版本书的主要动力。另一方面,在航天、航空、汽车、船舶、机床、桥梁、石油、农机、建筑等众多工业部门,通过模态实验分析了解结构的动力学特性,进而修改模型,优化设计,已经成为生产过程中不可或缺的必要环节。这些方面的专业工作者如果能够从本书中多少有所收获,哪怕是一点启迪,便足以令译者欣慰。

目前用于实验模态分析的专用软件程序和硬件设备种类繁多,生产厂家林立。附录中列出了几家公司的有关产品及其主要性能指标,也许对读者在配置自己的实验系统时有所帮助。

译者对原书印刷方面的错误,一经发现便予以纠正而不加说明。

本书翻译过程中,得到了哈尔滨工业大学屠良尧教授的鼓励与指导,译者深表感谢。

译者特别感谢北京空间飞行器总体设计部殷礼明研究员、于登云研究员、徐晓权高级工程师等领导同志,他们对本书倾注的热情和支持令人感动。同时,译者对 LMS 公司驻京代表处、KISTLER 公司以及东华测试技术开发有限公司在本书出版过程中给予的支持与帮助表示由衷的感谢。

译文错误仍所难免,诚请读者指正。

译 者

2000 年 2 月

前 言

本书试图概要叙述模态分析的理论及实验方法。模态分析是一项对描述系统动力学特性所需参数进行研究和估计的技术,因此有着广阔的应用领域:所有线性动力学系统,只要其输入输出可以测量,均可通过模态分析进行研究。虽然这并不是一项新技术,但主要是因为数字计算机的迅速发展大大增加了模态分析技术的现实可能性。

本书源于比利时卢温大学产品工程、机械设计与自动化分校 1976 年以来每年讲授的基本教程。早年的基础研究在最近几年迅速发展成为一种现代的大好局面。虽然新方法层出不穷,已有方法精益求精,但以系统的、统一的形式写成一本书,将这方面的知识总结一下,显得正当其时。

本书由互为补充、可相互引用的上下两篇组成。

比较讲究理论的工程师或已经有了一些模态分析的实际经验而仍想了解更多理论背景的人,对上篇会产生兴趣。开篇先讨论解析模态分析和实验模态分析所必需的基本理论。由于实验模态分析是建立在数字信号测量基础之上的,所以第二章讨论与实验模态分析有关的数字信号处理方面的内容。第三章阐述从实测得到的输入-输出数据导出模态参数(共振频率、阻尼系数、模态振型向量及模态参预因子)所采用的各种方法。这些参数经验证正确(第四章)后,便可用以对现有结构或处于设计阶段的产品的动力学特性加以改进。为达此目标,第五章给出的灵敏度分析、系统动态耦合、结构修改等,都是很有用的工具。这次新版后的第六章讨论两方面的课题:有限元模型修正和预试验分析,由此将有限元分析和实验振动分析联系起来。

下篇旨在讨论模态分析的实际运作:进行模态分析实验时,哪些方面要重点考虑?首先概括介绍必要的仪器设备:激振器、力传感器、位移传感器、数据采集系统、滤波器及分析系统。接着提出一些有关试验设置和测量装置校准的指导性原则。第三章讨论几种可能的激励信号及其优缺点。第四章说明在实际中如何按步骤进行参数估计,怎样使用上篇第三章所讨论的那些理论工具。

根据本课程学生及本书其他读者的意见,这次再版做了一些改进。第六章是重新写过的,不仅包括模型修正,还包括预试验分析方面的某些内容。

致 谢

这样一本书决不是一个人的著作。虽然第一作者将本书的几乎全部内容付诸文稿(或输入计算机),但没有其他作者和许多人的直接或间接帮助,使之成书是不可能的。

首先感谢产品工程、机械设计与自动化分校的结构动力学教研组。在前任教授雷蒙德·斯诺思(Raymond Snoeys)和现任教授波尔·萨斯(Paul Sas)的指导下,该小组的所有成员,虽然他们经常变动(而且时有成功),但都是本书的动力源泉。书中许多内容是以该“动态”小组现在或过去的成员撰写的文章、报告或博士论文为基础的,作者在适当的章节将明确提到他们。1976年以来,远在作者涉足模态分析以前很久,动力学小组每学年都开设一期模态分析课程,后来扩大成模态分析国际研讨会。这些课程的准备、关于课程内容的不间断的讨论、其他大学人员的参预、与工业界工程师们的交流等等,使作者们的模态分析知识不断扩展与深化。

第一作者对他的合作者深表感谢。斯蒂芬·拉门兹(Stefan Lammens)为 A.6 章的编写注入了灵感,而且与他的多次讨论使本书整体上得以改进。多谢波尔·萨斯教授的启发、垂询、批评、建议、修改意见及耐心,这对完成本书是不可缺少的。波尔·萨斯教授是多么想亲自撰写这本书啊!只可惜他没有时间。

另一个动力来自美国辛辛那提大学的结构动力学教研组。卢温大学与辛辛那提大学的合作始于30年前,那时雷蒙德·斯诺思和大卫·布朗(Dave Brown)相识并成了朋友。这两所大学的许多研究人员经常互访或一道工作。辛辛那提大学教研组每年对卢温大学基本课程的意见,我们之间就课程内容的讨论以及辛辛那提大学的教材内容,对本书都是极大的帮助。

第一作者还要感谢产品工程、机械设计与自动化分校的员工们,他非常称赞员工们给了他时间和自由撰写本书。各位作者对分校多年来为他们提供和谐而令人鼓舞的研究环境深表谢意。

1997年5月于卢温

目 录

上篇 理 论

序言	(1)
A.1 章 解析模态分析和实验模态分析	(3)
A.1.0 引言	(3)
A.1.1 单自由度系统	(4)
A.1.1.1 系统方程 传递函数	(4)
A.1.1.2 系统极点 固有频率 阻尼比	(5)
A.1.1.3 留数	(6)
A.1.1.4 传递函数图	(6)
A.1.1.5 频率响应函数(FRF) 脉冲响应函数	(6)
A.1.1.6 质量、阻尼和刚度变化对 FRF 的影响	(8)
A.1.2 多自由度系统	(9)
A.1.2.1 系统方程 传递函数	(9)
A.1.2.2 系统极点 固有频率 阻尼因子	(11)
A.1.2.3 模态向量 留数	(11)
A.1.2.4 模态参预因子	(13)
A.1.2.5 频响函数矩阵 脉冲响应函数矩阵	(13)
A.1.2.6 无阻尼系统与比例阻尼系统	(16)
A.1.2.7 正交性 模态坐标	(17)
A.1.2.8 模态向量比例换算	(20)
A.1.2.9 解析法和实验法	(21)
A.1.3 单自由度系统举例	(22)
A.1.4 多自由度系统举例	(23)
A.1.4.1 一般粘性阻尼	(23)
A.1.4.2 比例粘性阻尼	(25)
A.1.4.3 无阻尼	(25)
A.1.5 结论	(26)
A.2 章 (数字)信号处理:基本理论	(27)
A.2.0 引言	(27)
A.2.1 各类信号的傅立叶变换	(28)
A.2.1.1 周期信号	(28)
A.2.1.2 非周期函数	(29)
A.2.1.3 采样时间函数	(30)
A.2.1.4 采样时间信号及其变换	(30)
A.2.2 一些分析参数	(31)
A.2.3 性质与关系式	(32)
A.2.3.1 叠加性质	(33)

A.2.3.2	比例相乘性质	(33)
A.2.3.3	时间变换性质	(33)
A.2.3.4	时移性质	(33)
A.2.3.5	频移性质和细化变换	(33)
A.2.3.6	能量关系	(34)
A.2.3.7	积分与微分性质	(35)
A.2.3.8	卷积性质	(35)
A.2.4	误差与窗	(35)
A.2.4.1	迭混	(35)
A.2.4.2	泄漏	(37)
A.2.4.3	窗	(40)
A.2.5	其他变换	(44)
A.2.5.1	拉普拉斯变换	(44)
A.2.5.2	Z 变换	(45)
A.2.6	时间函数、频率函数及其应用	(45)
A.2.6.1	自功率谱与自相关函数	(45)
A.2.6.2	互功率谱与互相关函数	(46)
A.2.6.3	平均	(46)
A.2.6.4	频响函数与相干函数	(48)
A.2.7	结论	(52)
A.3 章	模态参数估计	(53)
A.3.0	引言	(53)
A.3.1	模态模型的基本方程	(53)
A.3.2	基本概念	(55)
A.3.2.1	单自由度法与多自由度法	(55)
A.3.2.2	局部参数识别与整体参数识别	(55)
A.3.2.3	单输入与多输入	(56)
A.3.2.4	模态模型与直接模型	(56)
A.3.2.5	低阶完整模型与高阶不完整模型	(57)
A.3.2.6	实模态振型与复模态振型	(57)
A.3.2.7	时域估计与频域估计	(58)
A.3.2.8	分类	(58)
A.3.3	单自由度法	(59)
A.3.3.1	峰值检测	(59)
A.3.3.2	模态检测	(59)
A.3.3.3	圆拟合	(60)
A.3.4	多自由度时域法	(61)
A.3.4.1	Ibrahim 时域法(ITD)	(61)
A.3.4.2	多参考点最小二乘复指数法(LSCE)	(62)
A.3.4.3	特征系统实现算法(ERA)	(63)
A.3.4.4	时域直接参数识别(TDPI)	(64)
A.3.5	多自由度频域法	(65)
A.3.5.1	(非线性)最小二乘频域法(LSFD)	(65)

A.3.5.2 结构系统参数识别(ISSPA)	(66)
A.3.5.3 正交多项式法(OP)	(67)
A.3.5.4 频域直接参数识别(FDPI)	(68)
A.3.5.5 复模态指示函数(CMIF)	(70)
A.3.6 结论	(71)
A.4 章 模型验证	(73)
A.4.0 引言	(73)
A.4.1 模态比例因子(MSF)和模态判定准则(MAC)	(73)
A.4.2 模态参预	(75)
A.4.3 互易性	(76)
A.4.4 模态复杂性	(77)
A.4.5 模态相位共线性和平均相位偏移	(77)
A.4.6 模态置信因子	(78)
A.4.7 频响函数综合	(79)
A.4.8 结论	(79)
A.5 章 模态参数的应用	(80)
A.5.0 引言	(80)
A.5.1 强迫响应分析	(81)
A.5.1.1 引言	(81)
A.5.1.2 理论	(81)
A.5.1.3 应用应用	(82)
A.5.2 灵敏度分析	(82)
A.5.2.1 引言	(82)
A.5.2.2 理论	(82)
A.5.2.3 应用领域	(85)
A.5.3 结构动力学修改与集成	(86)
A.5.3.1 引言	(86)
A.5.3.2 方法	(86)
A.5.3.3 应用方面	(99)
A.5.4 结论	(99)
A.6 章 数值模型与实验模型相结合	(100)
A.6.0 引言	(100)
A.6.1 模型修正	(100)
A.6.1.1 引言和一般思路	(100)
A.6.1.2 模型匹配	(102)
A.6.1.3 相关技术	(106)
A.6.1.4 修正参数的选择	(110)
A.6.1.5 矫正方法	(113)
A.6.1.6 小结	(118)
A.6.2 预试验分析	(118)
A.6.2.1 引言	(118)
A.6.2.2 频率范围	(119)

A.6.2.3 响应点的选择	(119)
A.6.2.4 激励点的选择	(121)
A.6.2.5 支承点的选择	(122)
A.6.2.6 小结	(123)
A.6.3 结论	(123)

下 篇 试 验

序言	(125)
B.1 章 试验设备	(127)
B.1.0 引言	(127)
B.1.1 激励系统	(127)
B.1.1.0 引言	(127)
B.1.1.1 固定式激励系统	(128)
B.1.1.2 非固定式激励系统	(130)
B.1.2 力和运动传感器	(131)
B.1.2.0 引言	(131)
B.1.2.1 力传感器	(132)
B.1.2.2 运动传感器	(133)
B.1.2.3 小结与评述	(138)
B.1.3 测量与分析系统	(138)
B.1.3.0 引言	(138)
B.1.3.1 PC 机系统	(139)
B.1.3.2 FFT 分析仪加 PC 机或工作站	(139)
B.1.3.3 数采前端加工作站	(140)
B.1.3.4 数据采集模块的基本构件	(140)
B.1.3.5 评述	(142)
B.1.4 结论与述评	(142)
B.2 章 校准与设置	(143)
B.2.0 引言	(143)
B.2.1 校准	(143)
B.2.1.0 引言	(143)
B.2.1.1 高精度校准法	(143)
B.2.1.2 重力校准法	(144)
B.2.1.3 冲击校准、背对背校准和绝对校准	(144)
B.2.1.4 比值校准	(145)
B.2.1.5 小结	(146)
B.2.2 试验设置	(146)
B.2.2.0 引言	(146)
B.2.2.1 悬挂 边界条件	(146)
B.2.2.2 激励	(148)
B.2.2.3 响应点	(149)

B.2.2.4 设备 传感器	(150)
B.2.2.5 试验程序的确定	(150)
B.2.2.6 小结	(151)
B.2.3 FRF 测量 设置验证	(151)
B.2.3.0 引言	(151)
B.2.3.1 设置验证	(151)
B.2.3.2 FRF 测量	(155)
B.2.3.3 小结	(156)
B.2.4 结论	(156)
B.3 章 激励考虑	(157)
B.3.0 引言	(157)
B.3.1 激励信号概述	(158)
B.3.1.1 分类	(158)
B.3.1.2 评估依据	(158)
B.3.1.3 激励信号类型	(159)
B.3.1.4 小结	(168)
B.3.2 激励信号与 FRF 测量	(168)
B.3.2.0 引言	(168)
B.3.2.1 “线性”试验例	(169)
B.3.2.2 非线性动态特性	(178)
B.3.3 总结与结论	(180)
B.4 章 实践中的模态参数估计	(181)
B.4.0 引言	(181)
B.4.1 模态参数估计	(181)
B.4.1.0 引言	(181)
B.4.1.1 方法选择	(181)
B.4.1.2 测量选择	(183)
B.4.1.3 频带选择和/或时段选择	(183)
B.4.1.4 极点数	(184)
B.4.1.5 极点估计	(187)
B.4.1.6 模态向量估计	(189)
B.4.1.7 小结	(190)
B.4.2 模态模型验证	(190)
B.4.2.0 引言	(190)
B.4.2.1 频响函数综合	(190)
B.4.2.2 模态置信准则	(191)
B.4.2.3 模态参预	(193)
B.4.2.4 模态复杂性 模态相位共线性	(194)
B.4.2.5 小结	(195)
B.4.3 结论	(195)
附录	
AA.2.1 几个时间函数和频率函数的应用	(197)

AA.2.1.1	自功率谱与自相关函数	(197)
AA.2.1.2	互功率谱与互相关函数	(203)
AA.2.1.3	倒谱分析	(205)
AA.2.1.4	结论	(207)
AA.3.1	最小二乘复指数法举例	(207)
AA.6.1	模型修正;模型匹配、相关技术和模型矫正	(208)
AA.6.1.0	引言	(208)
AA.6.1.1	模型匹配	(211)
AA.6.1.2	相关技术	(212)
AA.6.1.3	修正参数的选择	(217)
AA.6.1.4	矫正方法	(219)
BB.1	LMS CADA - X 试验模态分析系统	(222)
BB.2	KISTLER 振动测量设备简介	(234)
BB.3	东华测试技术开发公司产品简介	(238)
参考文献		(241)
符号与说明		(250)

上篇 理 论

序 言

实验模态分析是若干工程学科的综合,因此要求较为广泛的理论基础。本书上篇的目的是将所有这些理论问题加以总结,重点集中在与实验模态分析直接有关的理论方面。

实验模态分析包括五个步骤。首先是建立试验“装置”,即固定试件、安装传感器、连接数据采集系统、校准测量系统等等。其次是进行数据采集并常常要估计频响函数。步骤三叫做系统识别,即根据测量出来的输入输出数据确定系统的振动特性。步骤四是对所获得的识别结果进行验证。所有这四个步骤是通往步骤五的必由之路;步骤五是应用系统的而不是零散的方法,根据得到的数据对系统加以改进。上述步骤以下列理论为基础:

(1)第一章从基本振动理论推演出模态分析理论,这是实验模态分析与解析模态分析总的理论基础。单自由度系统理论定义了一些概念,如系统极点、共振频率、阻尼比、留数等。将这些概念推广到多自由度系统便产生诸如模态振型、模态参预因子、模态质量、模态比例换算等概念。这些概念适用于一般粘性阻尼、比例阻尼和无阻尼的情形。

(2)第二章讨论有关数据采集的理论,即数字信号处理方法与频响函数的估计方法。作为数据在频域和时域之间互相转换的一种方法,我们先来讨论傅立叶变换及其性质。在数字信号处理过程中,最重要的误差来源是迭混和泄漏现象。最后说明如何从自功率谱与互功率谱来估计频响函数。

(3)第三章简要讨论几种参数识别理论。这些方法用以估计模态参数、系统极点(共振频率及阻尼系数)、模态振型及模态参预因子。模态参数描述的是系统的振动特性。本章指出了单自由度系统识别方法与多自由度系统识别方法之间的区别,单输入法与多输入法的区别,模态参数的局部估计与整体估计的区别,时域法与频域法的区别等等。

(4)第四章介绍一些数学工具,以便对获得的系统模态模型予以评估和验证。这些方法可以帮助我们判断下一步的结果是否靠得住。

(5)第五章说明怎样用测得的模态参数达到预测目的,所用方法有灵敏度分析、结构动力耦合、系统修改预测。所有这些方法的最终目标是改善现有结构(不论是在用结构、样机,还是设计阶段的结构)的动力学特性。

(6)第六章介绍如何将有限元建模与实验模态分析结合起来;要么改进有限元模型,要么优化试验设置。

下篇将讨论实验模态分析更为实际的方面:仪器设备、校准、试验设置、激励、实际的参数估计、误差的检测、预防和减小等。

A.1 章 解析模态分析和实验模态分析

A.1.0 引言

为了更好地理解实验模态分析的各种实用性,我们需要透彻理解其基本理论。本章讨论解析模态分析与实验模态分析,目的在于为工程师们研究结构动力学特性提供一个坚实的理论基础。研究一个系统的振动特性,基本上有两种途径。

第一种途径是解析式的,即先要知道结构的几何形状、边界条件和材料特性,把结构的质量分布、刚度分布和阻尼分布分别用质量矩阵、刚度矩阵和阻尼矩阵表示出来,这样便有了足够多的信息来确定系统的模态参数(固有频率、阻尼系数、模态振型)。理论证明,这些模态参数可以完整地描述系统的动力学特性。

第二种途径是从测量结构(样机)上某些点的动态输入力和输出响应开始,并且一般还要将测量得到的数据转换成频响函数,即作为频率函数的输出输入之比。理论将证明,这些频响函数可以用模态参数表示,因此实验模态分析的第二步就是从测得的频响函数来估计这些模态参数。

本章一个特别用意是说明上述两种研究途径之间的关系。首先讨论单自由度系统,主要是介绍系统极点、固有频率、阻尼比、留数等这样一些概念。然后将这一基本概念推演扩展到多自由度系统,并引出更多的概念,如模态向量、模态坐标、正交性、模态质量、模态刚度、模态阻尼及模态向量比例因子等等。

阐述理论之前,我们先解释自由度(DOF)概念及模态分析的基本假设。

一个刚体质量的自由度数是确定它在空间的位置所需要的最少坐标数目。一个空间刚体共有六个自由度:三个平动自由度(x, y, z)确定质量中心的位置,三个转动自由度($\theta_x, \theta_y, \theta_z$)确定刚体的方位。因为任何连续结构都可以认为是无限多个微元刚体质量的组合,所以这样的结构都有无穷多个自由度。但是,所有这些结构又可以近似看做是有限个小刚体质量(一组我们所关心的实际质量点,每个点有六个自由度)的组合,因此它们又可以认为具有有限个自由度 N , 该自由度数决定了解析质量矩阵、刚度矩阵和阻尼矩阵的维数,也决定了理论上存在的固有频率数和模态振型阶数。然而能够测到的自由度数还要受到某些实际条件的限制,如转动自由度的测量极其困难,有限的频率范围也限制了可检测到的模态数目。因此,若解析模型有 N 个自由度,而实验只能提供关于 N_i 个输入自由度、 N_o 个输出自由度以及 N_m 个可以检测到的振型的信息。

模态分析理论的基本假设是:

线性假设:结构的动态特性是线性的,就是说任何输入组合引起的输出等于各自输出的组合,其动力学特性可以用一组线性二阶微分方程来描述。每次进行模态分析试验时,应当首先检查结构的线性动态特性(B.2.3.1节)。

时不变性假设:结构的动态特性不随时间而变化,因而微分方程的系数是与时间无关的常数。由于不得不安装在结构上的运动传感器的附加质量,可能出现典型的时不变性问题(见

B.1.2.2 节)。

可观测性假设:这意味着用以确定我们所关心的系统动态特性所需要的全部数据都是可以测量的。为了避免出现可观测性问题,合理选择响应自由度是非常重要的(见 A.6.2.3 和 B.2.2.3 节)。

此外还常常假设结构遵从 Maxwell 互易性原理,即在 q 点输入所引起的 p 点的响应,等于在 p 点的相同输入所引起的 q 点的响应。此假设使得质量矩阵、刚度矩阵、阻尼矩阵和频响函数矩阵都成了对称矩阵。多输入试验允许对所测的频响函数做互易性检查(见 B.2.3.1 节)。

虽然本章内容是一般的振动知识,但主要还是以 R. Allemang 和其他作者编写的教科书为基础的,见参考文献 a.1.1, 另外一些内容见参考文献 a.1.2(D. Ewins 著)。

A.1.1 单自由度系统

本节将介绍几个与模态分析有关的基本概念,这些概念在讨论多自由度系统时(A.1.2 节)还将再次出现。我们将从力平衡方程出发,导出传递函数的表达式,即输出与输入作为拉氏变量函数的比。传递函数的分母就是系统的特征方程,它决定着系统的极点、固有频率和阻尼比。传递函数的部分分式展开式的诸分子包含着留数。A.1.1.5 节将讨论传递函数在时域与频域的等效形式——频响函数与脉冲响应函数。最后, A.1.1.6 节说明质量、刚度、阻尼的改变对单自由度系统的动态特性有什么样的影响。

A.1.1.1 系统方程 传递函数

粘性阻尼单自由度(SDOF)系统(图 a.1.1)的力平衡方程式表示惯性力、阻尼力、弹性力与外力之间的平衡:

$$(a.1.1) \quad M\ddot{x}(t) + C\dot{x}(t) + Kx(t) = f(t).$$

其中 M : 质量;

C : 阻尼;

K : 刚度;

\ddot{x}, \dot{x}, x : 加速度, 速度, 位移;

f : 外力;

t : 时间变量。

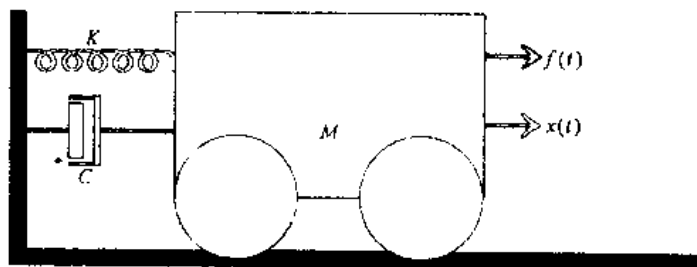


图 a.1.1 单自由度系统

这里我们把结构中所呈现出来的全部阻尼都近似为一般粘性阻尼。把上面的时间域方程变换到拉氏域(复变量 p), 并假定初始位移和初始速度为零, 则得到拉氏域方程:

$$(a.1.2) \quad (Mp^2 + Cp + K)X(p) = F(p), \text{ 或}$$

$$(a.1.3) \quad Z(p)X(p) = F(p).$$

其中 Z : 动刚度。

变换(a.1.2) 或 (a.1.3) 式可得传递函数的定义, $H(p) = Z^{-1}(p)$:

$$(a.1.4) \quad X(p) = H(p)F(p),$$

$$(a.1.5) \quad H(p) = \frac{1/M}{p^2 + (C/M)p + (K/M)}.$$

该传递函数是个复值函数(见图 a.1.2 到 a.1.5)。

A.1.1.2 系统极点 固有频率 阻尼比

上面(a.1.5)式右端的分母叫做系统特征方程, 它的根, 即系统极点, 是:

$$(a.1.6) \quad \lambda_{1,2} = -(C/(2M)) \pm \sqrt{(C/(2M))^2 - (K/M)}.$$

根据此式我们可以得到一些重要概念。如果没有阻尼($C=0$), 则所论系统是保守系统。由(a.1.6) 式, 我们定义系统的无阻尼固有频率(单位: rad/s) 为:

$$(a.1.7) \quad \Omega_1 = \sqrt{K/M}.$$

临界阻尼 C_c 定义为使(a.1.6) 式中根式项等于零的阻尼值;

$$(a.1.8) \quad C_c = 2M \sqrt{K/M},$$

而临界阻尼分数或阻尼比 ζ_1 为:

$$(a.1.9) \quad \zeta_1 = C/C_c.$$

阻尼有时也用品质因数即 Q 因数来表示: $Q = 1/(2\zeta_1)$ 。

从(a.1.6)式我们可以求得系统方程(a.1.1) 的齐次方程在时域中的解:

$$(a.1.10) \quad x(t) = x_1 e^{\lambda_1 t} + x_2 e^{\lambda_2 t}.$$

系统按阻尼值的大小可以分成过阻尼系统($\zeta_1 > 1$)、临界阻尼系统($\zeta_1 = 1$)和欠阻尼系统($\zeta_1 < 1$)。过阻尼系统的响应只含有衰减成分, 没有振荡趋势。欠阻尼系统的响应是一种衰减振荡, 而临界阻尼系统则是过阻尼系统与欠阻尼系统之间的一种分界。实际系统的阻尼比很少有大于 10 % 的, 除非这些系统含有很强的阻尼机制, 因此我们只研究欠阻尼的情形。在欠阻尼情况下, (a.1.6)式是两个共轭复根:

$$(a.1.11) \quad \lambda_1 = \sigma_1 + j\omega_1, \lambda_1^* = \sigma_1 - j\omega_1.$$

其中 σ_1 为阻尼因子*;

ω_1 是阻尼固有频率。

有关系统极点的另外一些关系式有:

$$(a.1.12) \quad \lambda_1 = (-\zeta_1 + j\sqrt{1-\zeta_1^2})\Omega_1,$$

$$(a.1.13) \quad \zeta_1 = -\frac{\sigma_1}{\sqrt{\omega_1^2 + \sigma_1^2}},$$

* 译注: 国内常称为衰减系数。

$$(a.1.14) \quad \sigma_1 = -\zeta_1 \Omega_1,$$

$$(a.1.15) \quad \Omega_1 = \sqrt{\omega_1^2 + \sigma_1^2}.$$

A.1.1.3 留数

考虑到(a.1.11)式,式(a.1.5)的传递函数可写成如下形式:

$$(a.1.16) \quad H(p) = \frac{1/M}{(p - \lambda_1)(p - \lambda_1^*)}.$$

再展开成部分分式形式,则有:

$$(a.1.17) \quad H(p) = \frac{A_1}{p - \lambda_1} + \frac{A_1^*}{p - \lambda_1^*}, \text{ 这里 } A_1 = \frac{1/M}{j2\omega_1}.$$

上式中的 A_1 和 A_1^* 就是留数。

A.1.1.4 传递函数图

图 a.1.2 至 a.1.5 分别表示典型的单自由度系统传递函数的实部、虚部、幅值和相位图形。请读者弄清楚图中坐标轴的不同刻度!

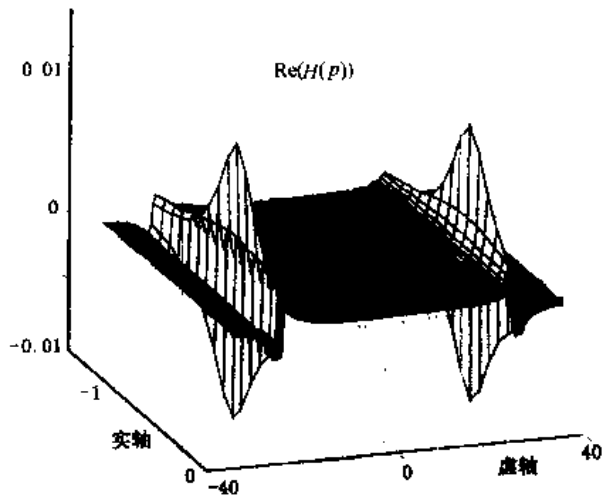


图 a.1.2 单自由度传递函数实部
(坐标轴单位: rad/s, 传递函数值的单位: mm/N)

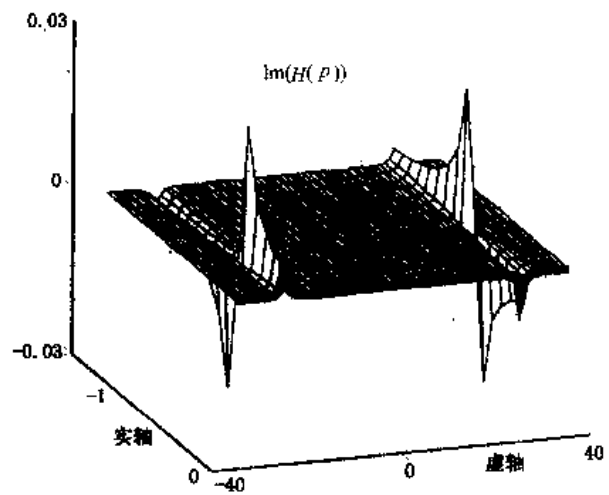


图 a.1.3 单自由度传递函数虚部
(坐标轴单位: rad/s, 传递函数值单位: mm/N)

A.1.1.5 频率响应函数(FRF) 脉冲响应函数

前面几节我们讨论了在拉氏域中单自由度系统的输入(力)和输出(位移)之间的关系,这种关系也可以在频域或时域中表达。沿频率轴($j\omega$)算出的传递函数叫做频率响应函数(FRF),简称频响函数:

$$(a.1.18) \quad |H(p)|_{p=j\omega} = H(\omega) = \frac{A_1}{(j\omega - \lambda_1)} + \frac{A_1^*}{(j\omega - \lambda_1^*)}.$$

频响函数是传递函数的一个子集:它是通过频率轴(即 $j\omega$, 或 $\sigma = 0$)的截面。频响函数中复共轭部分(即上式右端后一部分)的影响在共振频率 $\omega \approx \omega_1$ 附近可以忽略,因此单自由度系

统的频响函数常常近似为：

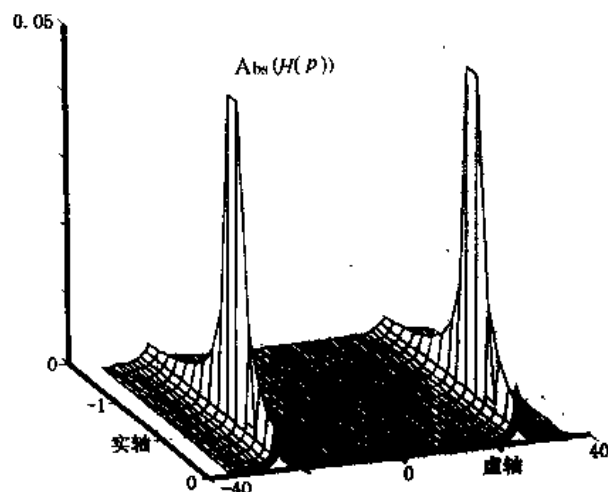


图 a.1.4 单自由度传递函数幅值
(坐标轴单位: rad/s, 传递函数值单位: mm/N)

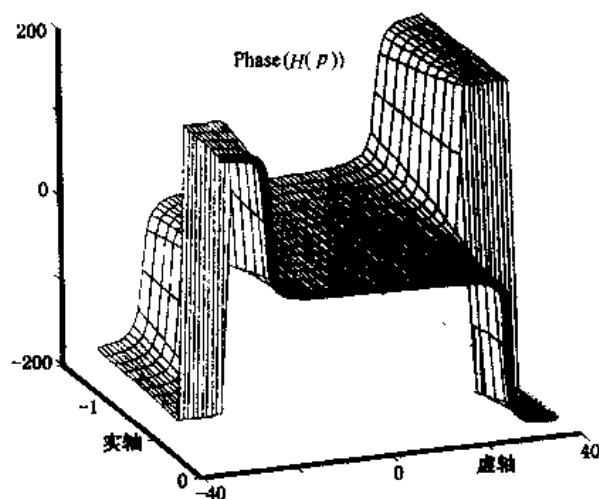


图 a.1.5 单自由度传递函数相位
(坐标轴单位: rad/s, 传递函数相位单位: 度)

(a.1.19)*
$$H(\omega) \approx \frac{A_1}{j\omega - \lambda_1}$$

A.3.3 节将说明, 这个近似公式就是单自由度参数估计法所用的基本公式, 还将说明在假定了单自由度条件之后, 怎样从测得的频响函数来估计模态参数(系统极点和留数)。

图 a.1.6 表示典型的频响函数的实部和虚部。这两条曲线等于图 a.1.2 和 a.1.3 中粗实线的正频率部分。

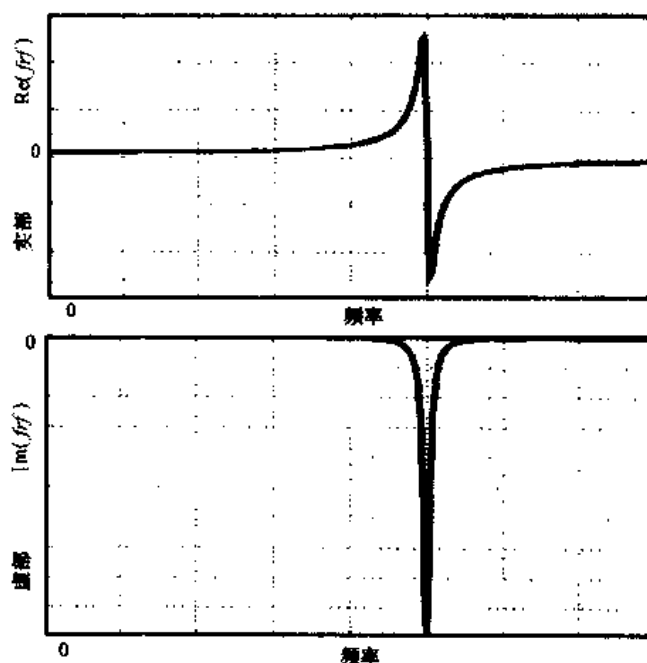


图 a.1.6 单自由度频响函数的实部和虚部

* 译注: 式(a.1.19)的优点是其奈奎斯特图为圆弧, 可用圆拟合方法(参阅 a.3.3.3 节)。该式也称为“单极点拟合式”。

对(a.1.17)式的传递函数施行拉氏反变换,使得时域的脉冲响应函数表达式:

$$(a.1.20) \quad h(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_1^* e^{\lambda_1^* t} = e^{\sigma_1 t} (A_1 e^{j\omega_1 t} + A_1^* e^{-j\omega_1 t})$$

留数 A_1 决定初始幅值,极点的实部 σ_1 表示衰减率,虚部 ω_1 则表示振荡频率。一个系统的脉冲响应就是该系统对 $t=0$ 时刻的 Dirac 脉冲的响应。图 a.1.7 示出了典型的脉冲响应函数。

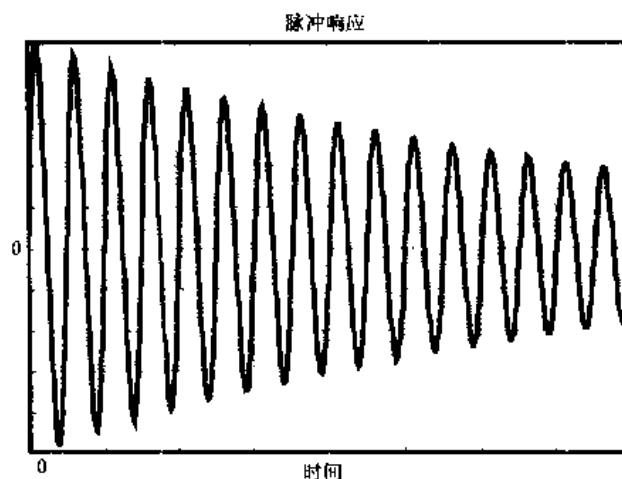


图 a.1.7 典型的单自由度脉冲响应函数

A.1.1.6 质量、阻尼和刚度变化对 FRF 的影响

图 a.1.8 到 a.1.10 表示刚度、阻尼和质量的变化是怎样影响单度系统的频率响应的。

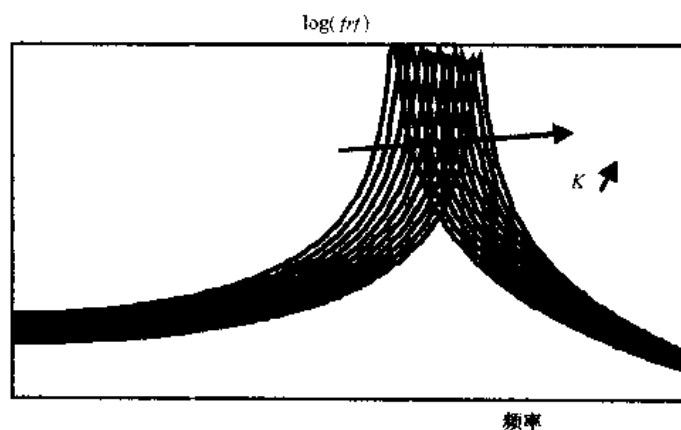


图 a.1.8 SDOF 系统:刚度变化的影响

刚度的增加会导致共振频率的提高,并且降低 FRF 在低频段的幅值(图 a.1.8)。因为在频响函数低频段刚度的影响具有支配性,所以把这段区域叫做刚度线,或者更确切一些叫做柔度线。

增加阻尼会使共振频率(ω_1)略有减小,但它的主要作用是减小频响函数在共振点的幅值(图 a.1.9),同时使相位的改变较为平缓。如果阻尼为零,在共振点振动幅度将趋向无穷大,相位会突变 180° ,而且系统极点 λ_1 变成纯虚数,其大小等于无阻尼固有频率($\Omega_1 = \sqrt{K/M}$)。

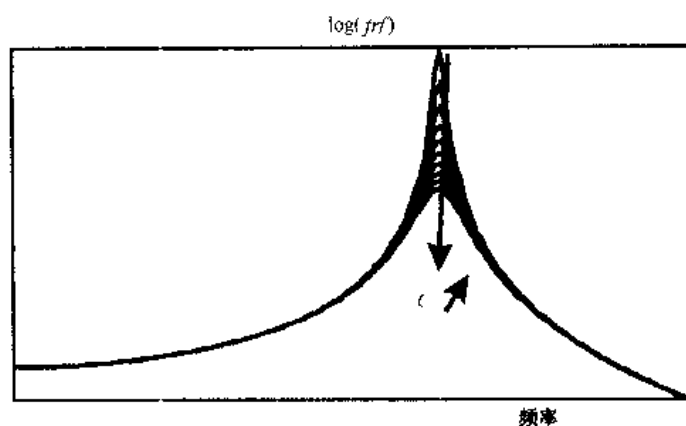


图 a.1.9 SDOF 系统:阻尼变化的影响

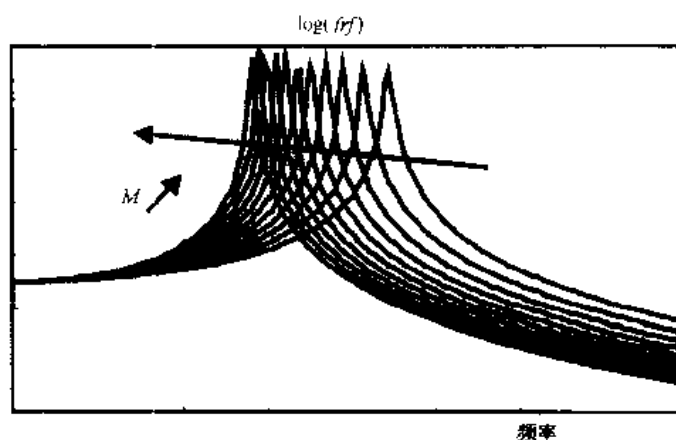


图 a.1.10 SDOF 系统:质量变化的影响

增大质量会降低共振频率,同时也降低 FRF 在高频段的幅值(图 a.1.10)。由于质量对高频段曲线起支配作用,所以单度系统频响函数的高频段叫做质量线。

A.1.2 多自由度系统

本节将把从单自由度系统引出的概念加以扩展,从系统极点来定义固有频率和阻尼因子。系统极点是由传递函数的分母决定的,一旦知道了系统极点,传递函数便可表示成部分分式形式,这表明多自由度系统的传递函数是多个单自由度系统传递函数的线性组合。我们将特别对照单自由度系统来推广留数概念。A.1.2.3 节和 A.1.2.4 节将说明留数、模态振型向量和模态参预因子之间的关系。就系统矩阵而言,模态振型向量服从正交性条件,这些正交性又决定了模态比例因子。A.1.2.6 节讨论一些特殊的阻尼情形,即无阻尼系统和比例阻尼系统。

A.1.2.1 系统方程 传递函数

大多数情况下,我们研究的系统不能视为单自由度系统,因为它们都是由无穷多个质量、刚度和阻尼构成的连续组合体。下面几节我们将讨论多自由度(MDOF)系统的传递函数与

其模态参数(共振频率和模态向量)之间有什么样的关系。

关于多自由度系统,我们可以把描述单自由度系统的简单的力平衡代数方程(a.1.1)式演化成形式相似的一个矩阵方程。现以图 a.1.11 的二自由度系统为例加以说明。

该系统的运动方程如下:

(a.1.21)

$$\begin{cases} M_1 \ddot{x}_1(t) + (C_1 + C_2) \dot{x}_1(t) - C_2 \dot{x}_2(t) + (K_1 + K_2)x_1(t) - K_2 x_2(t) = f_1(t) \\ M_2 \ddot{x}_2(t) + (C_2 + C_3) \dot{x}_2(t) - C_2 \dot{x}_1(t) + (K_2 + K_3)x_2(t) - K_2 x_1(t) = f_2(t) \end{cases}$$

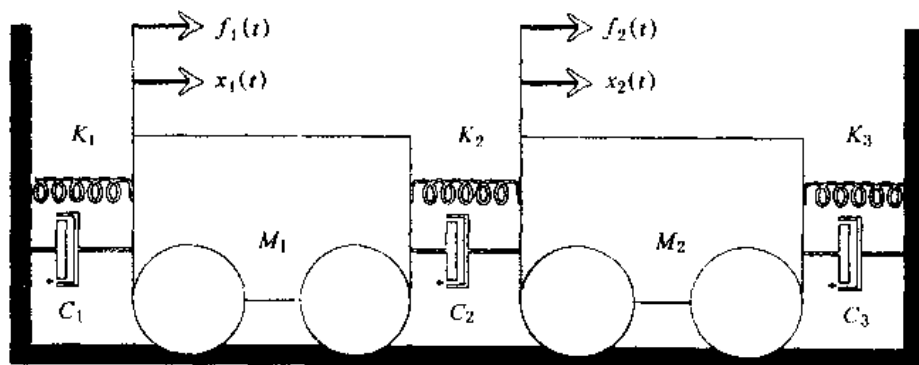


图 a.1.11 二自由度系统之例

写成矩阵形式是(为便于阅读,省去 t):

$$(a.1.22) \quad \begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_1 + C_2 & -C_2 \\ -C_2 & C_2 + C_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 + K_2 & -K_2 \\ -K_2 & K_2 + K_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}, \quad \text{或者}$$

$$(a.1.23) \quad [M]\ddot{x} + [C]\dot{x} + [K]x = f.$$

其中 $[M]$ 、 $[C]$ 、 $[K]$ 、 $\{f(t)\}$ 和 $\{x(t)\}$ 分别为质量矩阵、阻尼矩阵、刚度矩阵、力向量和响应向量。

上述方程也能描述自由度更多的系统的特性,只不过矩阵维数相应增多而已。把这个时间域的矩阵方程变换到拉氏域(变量为 p),并且假定初始位移和初始速度为零,则得:

$$(a.1.24) \quad (p^2[M] + p[C] + [K])\{X(p)\} = \{F(p)\}, \quad \text{或者}$$

$$(a.1.25) \quad [Z(p)]\{X(p)\} = \{F(p)\}.$$

式中 $[Z(p)]$: 动刚度矩阵。

颠倒一下(a.1.24)式或(a.1.25)式,可以得出传递函数矩阵 $[H(p)]$ 的定义:

$$(a.1.26) \quad \{X(p)\} = [H(p)]\{F(p)\}.$$

按照标准算法,一个矩阵的逆矩阵可以由它的随伴矩阵计算出来:

$$(a.1.27) \quad [H(p)] = [Z(p)]^{-1} = \frac{\text{adj}([Z(p)])}{|Z(p)|}.$$

式中 $\text{adj}([Z(p)])$: $[Z(p)]$ 的随伴矩阵,等于 $[\epsilon_{ij}|Z_{ij}|]^T$;

$|Z_{ij}|$: $[Z(p)]$ 去掉第 i 行第 j 列后的行列式;

$$\varepsilon_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{如果 } i+j \text{ 等于偶数;} \\ -1 & \text{如果 } i+j \text{ 等于奇数。} \end{cases}$$

$|Z(p)|: [Z(p)]$ 的列行式。

传递函数矩阵含有复值函数。

A.1.2.2 系统极点 固有频率 阻尼因子

(a.1.27)式的分母,即 $[Z(p)]$ 的行列式,叫做**系统特征方程**。与单自由度情况一样,系统特征方程的根,即**系统极点**,决定系统的共振频率。根据特征值问题,可以求出系统特征方程的根。为了把系统方程(a.1.24)式转化为一般特征值问题公式,我们要加入下面的恒等式:

$$(a.1.28) \quad (p[M] - p[M])\{X\} = \{0\}.$$

将此式与(a.1.24)式结合在一起得:

$$(a.1.29) \quad (p[A] + [B])\{Y\} = \{F'\},$$

$$\text{其中} \quad [A] = \begin{bmatrix} [0] & [M] \\ [M] & [C] \end{bmatrix}, [B] = \begin{bmatrix} -[M] & [0] \\ [0] & [K] \end{bmatrix},$$

$$\{Y\} = \begin{Bmatrix} p\{X\} \\ \{X\} \end{Bmatrix}, \quad \{F'\} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{F\} \end{Bmatrix}.$$

如果力函数等于零,那么(a.1.29)式就成了关于实值矩阵的一般特征值问题,其特征值就是满足下列方程的 p 的值:

$$(a.1.30) \quad |p[A] + [B]| = 0.$$

仔细研究一下该方程即可知道,它的根就是上面提到的特征方程 $|Z(p)| = 0$ 的根。对于 N 自由度系统,此方程有 $2N$ 个呈复共轭对出现的特征根:

$$(a.1.31)$$

$$[\Lambda] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_N & \\ & & & \lambda_1^* \\ & 0 & & \ddots \\ & & & & \lambda_N^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 + j\omega_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \sigma_N + j\omega_N & \\ & & & \sigma_1 - j\omega_1 \\ & 0 & & \ddots \\ & & & & \sigma_N - j\omega_N \end{bmatrix}.$$

同单自由度系统一样,极点的实部 σ_r 是**阻尼因子**,虚部 ω_r 是**阻尼固有频率**。

A.1.2.3 模态向量 留数

上面提到的特征值对应着一组特征向量。对于多自由度系统,由这些特征向量可以引出**模态振型向量**(也叫**模态位移向量**、**模态向量**) $\{\Psi\}$,的概念。这些向量也呈复数共轭对出现。每个特征向量对应一个具体的特征值:

$$(a.1.32) \quad [\Phi] = \begin{bmatrix} \lambda_1\{\Psi\}_1 & \cdots & \lambda_N\{\Psi\}_N & \lambda_1^*\{\Psi\}_1^* & \cdots & \lambda_N^*\{\Psi\}_N^* \\ \{\Psi\}_1 & \cdots & \{\Psi\}_N & \{\Psi\}_1^* & \cdots & \{\Psi\}_N^* \end{bmatrix}.$$

一般情况下,这些模态向量都含有复值模态位移,因而它们的元素的相位可能不同。在对应的极点 λ_r 上,这些向量(因为是特征向量)使得系统方程(a.1.24)式中的力向量 $\{F\}$ 等于零:

$$(a.1.33) \quad (\lambda_r^2 [M] + \lambda_r [C] + [K]) \{\Psi\}_r = [Z(\lambda_r)] \{\Psi\}_r = \{0\}.$$

与单自由度系统相仿,我们引入留数的概念。因为 λ_r 和 λ_r^* ($r=1, 2, \dots, N$) 是系统特征方程 $|Z(p)|$ 的根,所以可将传递函数公式(a.1.27)式重写如下:

$$(a.1.34) \quad [H(p)] = \frac{\text{adj}([Z(p)])}{\prod_{r=1}^N E(p - \lambda_r)(p - \lambda_r^*)} = \frac{\text{adj}([Z(p)])}{\prod_{r=1}^{2N} E(p - \lambda_r)},$$

式中 E : 常数;

$$\lambda_{N+s} = \lambda_s^*, s=1, 2, \dots, N.$$

将上式展开成部分分式形式为:

$$(a.1.35) \quad [H(p)] = \sum_{r=1}^N \left(\frac{[A]_r}{(p - \lambda_r)} + \frac{[A]_r^*}{(p - \lambda_r^*)} \right),$$

式中的 $[A]_r$ 和 $[A]_r^*$ 项叫做留数。根据留数定理,这些留数等于:

$$(a.1.36) \quad [A]_r = ([H(p)](p - \lambda_r)) \Big|_{p=\lambda_r}.$$

下面的推导将揭示出留数与模态振型向量之间的关系。将(a.1.34)式代入(a.1.36)式,得:

$$(a.1.37) \quad [A]_r = \frac{\text{adj}([Z(\lambda_r)])}{\prod_{s=1, s \neq r}^{2N} E(\lambda_r - \lambda_s)}, \quad \text{或者} \\ [A]_r = P_r \text{adj}([Z(\lambda_r)]),$$

其中, P_r 是一个与极点有关的常数。因此,(a.1.35)式成为:

$$(a.1.38) \quad [H(p)] = \sum_{r=1}^N \left(\frac{P_r \text{adj}([Z(\lambda_r)])}{(p - \lambda_r)} + \frac{P_r^* \text{adj}([Z(\lambda_r^*)])}{(p - \lambda_r^*)} \right).$$

仔细观察一下 $\text{adj}([Z(\lambda_r)])$ 这一项,就会明白传递函数矩阵 $[H(p)]$ 与模态向量 $\{\Psi\}_r$ 之间的关系。重新将传递函数矩阵表达式(a.1.27)写成如下形式:

$$(a.1.39) \quad [Z(p)] \text{adj}([Z(p)]) = |Z(p)| [I_N].$$

就 $p = \lambda_r$ 计算上式,因为 λ_r 是特征方程的一个根,所以有:

$$(a.1.40) \quad [Z(\lambda_r)] \text{adj}([Z(\lambda_r)]) = [0].$$

考虑 $\text{adj}([Z(\lambda_r)])$ 的任一行,比如第 i 行,则有:

$$(a.1.41) \quad [Z(\lambda_r)] \{\text{adj}([Z(\lambda_r)])\}_i = \{0\}.$$

此式与(a.1.33)式相同,表示特征向量 $\{\Psi\}_r$ 的齐次方程。因此, $\{\text{adj}([Z(\lambda_r)])\}_i$ 与 $\{\Psi\}_r$ 这两个向量是成比例的,都是与特征值 λ_r 相对应的特征向量。对于 $\text{adj}([Z(\lambda_r)])$ 的无论哪个列向量,情况都是如此。由于 $\text{adj}([Z(\lambda_r)])$ 的所有列向量都相互成比例,所以矩阵 $\text{adj}([Z(\lambda_r)])$ 的秩等于 1,这也意味着该矩阵的所有各行亦成比例。因而,就 $p = \lambda_r$ 计算出来的这个随伴矩阵满足下列条件:

$$(a.1.42) \quad \text{adj}([Z(\lambda_r)]) = \{\Psi\}_r \langle L \rangle_r.$$

因为遵循 Maxwell 互易性原理的系统的质量、刚度、阻尼等矩阵都是对称的,所以动刚度矩阵 $[Z(p)]$ 及其随伴矩阵也都是对称的,所以 $\text{adj}([Z(\lambda_r)])$ 的各行均与第 r 阶模态向量成比例:

$$(a.1.43) \quad \text{adj}([Z(\lambda_r)]) = R_r \{\Psi\}_r \{\Psi\}_r^T = R_r \begin{bmatrix} \Psi_1 \Psi_1 & \Psi_1 \Psi_2 & \cdots & \Psi_1 \Psi_N \\ \Psi_2 \Psi_1 & \Psi_2 \Psi_2 & \cdots & \Psi_2 \Psi_N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Psi_N \Psi_1 & \Psi_N \Psi_2 & \cdots & \Psi_N \Psi_N \end{bmatrix}_r,$$

其中, R_r 是与 $\{\Psi\}_r$ 换算比例有关的一个常数, 上注脚 T 表示矩阵转置。

将此式代入(a.1.38)式, 并记 $Q_r = P_r R_r$, 则得:

$$(a.1.44) \quad [H(p)] = \sum_{r=1}^N \left(\frac{Q_r \{\Psi\}_r \{\Psi\}_r^T}{(p - \lambda_r)} + \frac{Q_r^* \{\Psi\}_r^* \{\Psi\}_r^{*T}}{(p - \lambda_r^*)} \right).$$

于是各留数矩阵为:

$$(a.1.45) \quad [A]_r = Q_r \{\Psi\}_r \{\Psi\}_r^T.$$

因为 $[A]_r$ 的各列相互成比例, 所以任意一列(如第 j 列)都包含有足够多的信息来构成该矩阵, 除非这一列碰巧含有一个等于零的模态系数 Ψ_{jr} , 此时相应的行与列将等于零。在实践上这意味着, 若将激励点选在某一阶模态的一个节点上, 那么这一阶模态就不能检测出来。正确选择激励自由度即可避免这一问题(见 A.6.2.4 和 B.2.2.2 节)。

式(a.1.35)中的留数矩阵 $[A]_r$ 是绝对量, 而模态向量 $\{\Psi\}_r$, 如(a.1.45)式表明, 是可以按比例换算因子 Q_r 进行换算的。

A.1.2.4 模态参预因子

$$\begin{aligned} \text{记} \quad [V] &= [\{\Psi\}_1 \cdots \{\Psi\}_N \quad \{\Psi\}_1^* \cdots \{\Psi\}_N^*], \\ [L] &= [Q_1 \{\Psi\}_1 \cdots Q_N \{\Psi\}_N \quad Q_1^* \{\Psi\}_1^* \cdots Q_N^* \{\Psi\}_N^*]^T \\ &= [\backslash Q \backslash] [V]^T, \end{aligned}$$

并考虑到 $[p \backslash I \backslash - \backslash \Delta \backslash]^{-1}$ 中含有 $\frac{1}{p - \lambda_r}$ 和 $-\frac{1}{p - \lambda_r^*}$ 项, 所以(a.1.44)式可以写成:

$$(a.1.46) \quad [H(p)] = [V] [p \backslash I \backslash - \backslash \Delta \backslash]^{-1} [L], \text{ 或者} \\ [H(p)] = [V] [p \backslash I \backslash - \backslash \Delta \backslash]^{-1} [\backslash Q \backslash] [V]^T.$$

根据上式, 输入力 $\{F(p)\}$ 与输出位移 $\{X(p)\}$ 之间的关系可以表示为:

$$(a.1.47) \quad \{X(p)\} = [H(p)] \{F(p)\} = [V] [p \backslash I \backslash - \backslash \Delta \backslash]^{-1} [L] \{F(p)\}.$$

这里, 矩阵 $[V]$ 与响应或位移有关, 叫做模态向量矩阵。矩阵 $[L]$ 与输入或力有关, 叫做模态参预因子矩阵, 它由模态向量的转置与相应的比例换算因子 Q 的乘积构成。就此而言, $[L]$ 是各激励自由度对各阶模态激励有效性的一种量度(见 A.4.2 和 B.4.2.3 节)。

A.1.2.5 频响函数矩阵 脉冲响应函数矩阵

沿频率轴($j\omega$)计算的传递函数矩阵叫做频响函数矩阵。由式(a.1.44)可得频响函数矩阵为:

$$(a.1.48) \quad [H(j\omega)] = \sum_{r=1}^N \left(\frac{Q_r \{\Psi\}_r \{\Psi\}_r^T}{(j\omega - \lambda_r)} + \frac{Q_r^* \{\Psi\}_r^* \{\Psi\}_r^{*T}}{(j\omega - \lambda_r^*)} \right),$$

或根据式(a.1.46)和(a.1.47)有:

$$(a.1.49) \quad [H(j\omega)] = [V][j\omega[I_N] - [\Lambda_N]]^{-1}[L], \quad \text{和}$$

$$[X(j\omega)] = [V][j\omega[I_N] - [\Lambda_N]]^{-1}[L][F(j\omega)].$$

由于实践上的限制,实验模态分析绝不可能去测量完整的频响函数矩阵 $[H(j\omega)]$ 。模态数 N_m 将总是小于响应点的数目 N_o ,而响应点的数目 N_o 又总是小于自由度数 N 。在大多数情况下,输入点数 N_i 通常为1~5,远小于响应点数。因此这些实践上的近似将改变(a.1.49)式中的那些矩阵的维数,如下所示:

$$(a.1.50) \quad [X(j\omega)]_{N_o \times 1} = [H(j\omega)]_{N_o \times N_i} [F(j\omega)]_{N_i \times 1}, \quad \text{或}$$

$$[X(j\omega)]_{N_o \times 1} = [V]_{N_o \times 2N_m} [j\omega[I_N] - [\Lambda_N]]_{2N_m \times 2N_m}^{-1} [L]_{2N_m \times 2N_m} [F(j\omega)]_{N_i \times 1}.$$

根据(a.1.48)式,频响函数可以解释为许多分量之和,其中每个分量都等效于一个单自由度系统的响应(见图 a.1.12 和参考文献 a.1.3)。

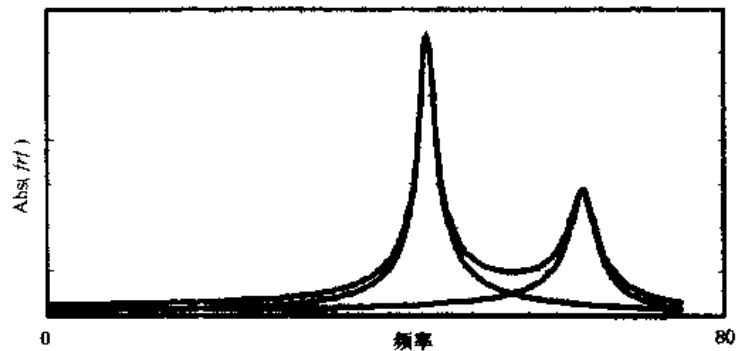


图 a.1.12 作为两个单度系统频响函数之和的频响函数

频响函数可以用几种方法表示:以实部、虚部作为频率函数的实频、虚频图(图 a.1.13a),以幅值(经常以对数刻度)和相位作为频率函数的幅频、相频图(Bode图,见图 a.1.13b)和以频率作为参变量的实部对虚部的曲线图(奈奎斯特图或 Argand 图,见图 a.1.13c)等。

对传递函数矩阵表达式进行拉氏反变换,便得到时域的脉冲响应函数矩阵:

$$(a.1.51) \quad [h(t)] = \sum_{r=1}^N (Q_r [\Psi]_r [\Psi]_r^T e^{\lambda_r t} + Q_r^* [\Psi]_r^* [\Psi]_r^{*T} e^{\lambda_r^* t})$$

或者,根据(a.1.46)式,有:

$$(a.1.52) \quad [h(t)] = [V][e^{\Lambda t}][L]$$

其中

$$[e^{\Lambda t}] = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & e^{\lambda_N t} & & \\ & & & e^{\lambda_1^* t} & \\ 0 & & & & \ddots \\ & & & & & e^{\lambda_N^* t} \end{bmatrix}$$

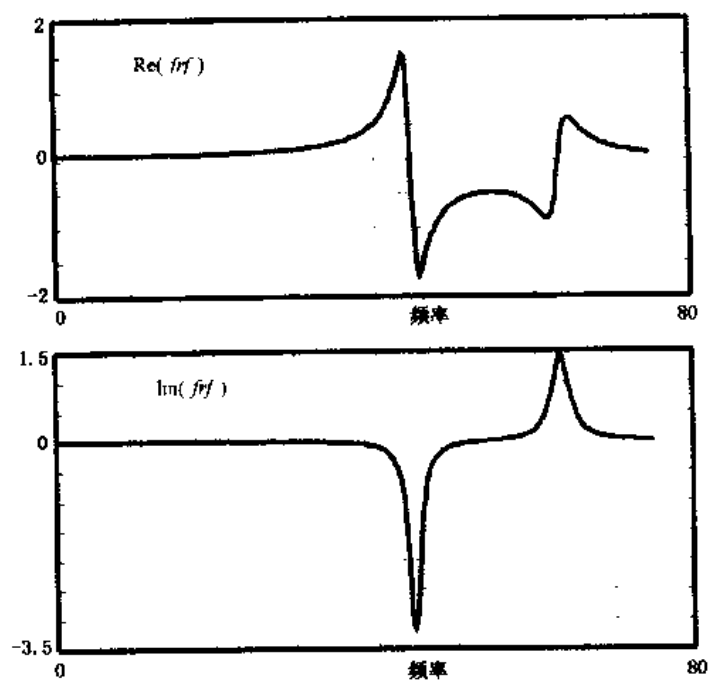


图 a.1.13a FRF 的实部和虚部

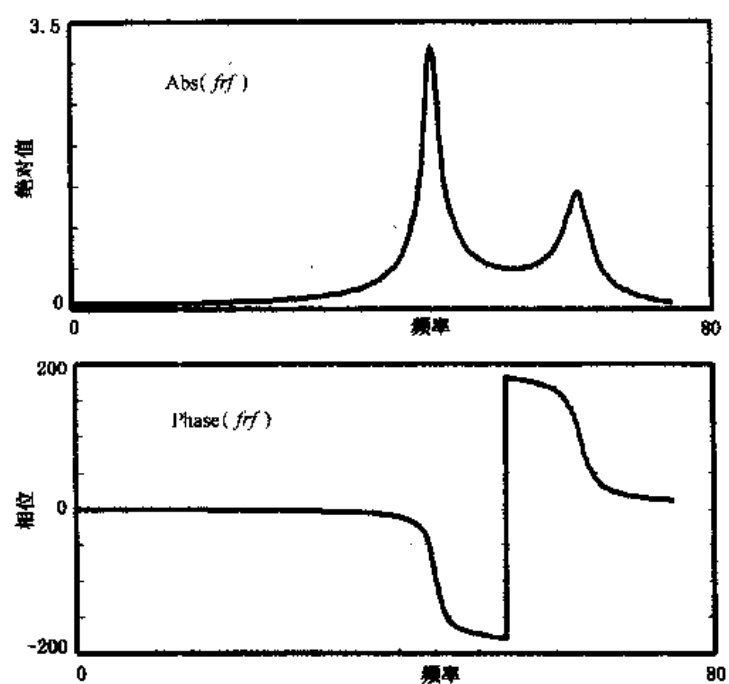


图 a.1.13b FRF 的幅值和相位

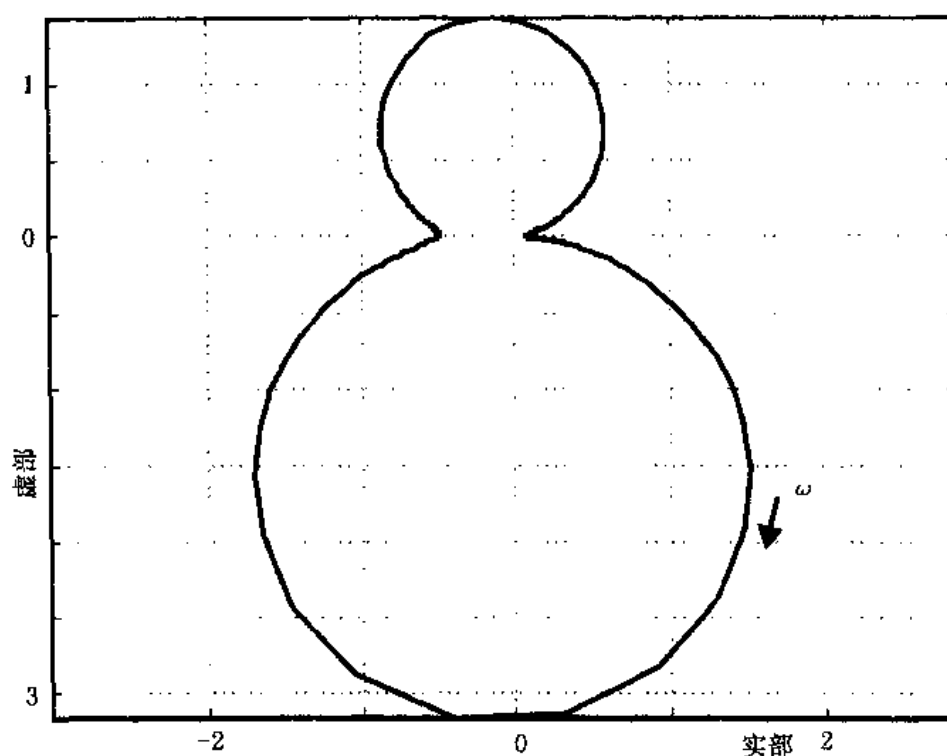


图 a.1.13c FRF 的实部对虚部图(奈奎斯特图或 Argand 图)

A.1.2.6 无阻尼系统与比例阻尼系统

前面几节讨论的是很一般的情况,系统的阻尼都近似看做是一般的粘性阻尼。这样的阻尼系统的共振频率(系统极点)、模态向量(各向量元素相位不同)及频率响应都是复值的。下面几个段落将讨论两种特殊的阻尼情形,即无阻尼系统与比例阻尼系统。

如果阻尼矩阵 $[C]$ 为零矩阵,则拉氏域中的系统方程(a.1.24)变为:

$$(a.1.53) \quad (p^2[M] + [K])\{X\} = \{F\}.$$

按照一般粘性阻尼情况的推导方法,演绎上式会得到呈复数共轭对出现的纯虚数极点(阻尼因子 $\sigma_i = 0$):

$$(a.1.54) \quad \lambda_1 = j\omega_1, \dots, \lambda_N = j\omega_N, \lambda_1^* = -j\omega_1, \dots, \lambda_N^* = -j\omega_N.$$

通常,与特征根 λ_i 相对应的振型向量 $\{\Psi\}$,将含有复值模态位移,但某个模态向量的各元素之间的相位差不是 0° 就是 180° 。由于模态振型向量决定于所选取的比例因子 Q_i (式(a.1.45)),所以这些模态向量可以按比例换算成纯实数值向量。因此,无阻尼情况下的模态振型向量被称为实模态向量或纯模态向量。模态模型验证技术中的“模态相位共线性”和“平均相位偏移”等方法就是以这一特性为根据的(见 A.4.5 和 B.4.2.4 节)。

在无阻尼情况下,特征方程 $p^2[M] + [K] = 0$ 的根比较容易地按下式特征值问题求解:

$$(a.1.55) \quad (p^2[M] + [K])\{X\} = \{0\}.$$

求解上式可直接得到特征值 $-\omega_i^2$ 及相应的纯模态向量 $\{\Psi\}_i$ 。上面特征方程的根就是这些特征值的平方根。

频域($p = j\omega$)中的动刚度矩阵 $[Z(j\omega)] = -\omega^2[M] + [K]$ 是实数值,作为其逆的频响函数矩阵 $[H(j\omega)]$ 也是个实数矩阵。一般表达式(a.1.48)可以简化为:

$$(a.1.56) \quad [H(j\omega)] = \sum_{r=1}^N \frac{j2\omega_r Q_r [\Psi]_r [\Psi]_r^T}{(\omega_r^2 - \omega^2)}, \text{ 或}$$

$$[H(j\omega)] = [\Psi] \left[\begin{bmatrix} \omega_r^2 \\ \vdots \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \end{bmatrix} \right]^{-1} \begin{bmatrix} j2\omega_r Q_r \\ \vdots \end{bmatrix} [\Psi]^T.$$

注意,频响函数是实数值,所以 $Q_r [\Psi]_r [\Psi]_r^T$ 这个量是纯虚数。

比例阻尼在很大程度上是一种假设的阻尼形式,即阻尼矩阵 $[C]$ 满足下式:

$$(a.1.57) \quad [C] = \alpha[M] + \beta[K],$$

式中 α 和 β : 实常数。

系统方程变为:

$$(a.1.58) \quad (p^2[M] + p(\alpha[M] + \beta[K]) + [K])\{X\} = \{F\},$$

$$((p^2 + p\alpha)[M] + (p\beta + 1)[K])\{X\} = \{F\}.$$

考虑该方程的齐次形式,并以 $(p\beta + 1)$ 除两边得:

$$(a.1.59) \quad \left(\left(\frac{p^2 + p\alpha}{p\beta + 1} \right) [M] + [K] \right) \{X\} = \{0\}.$$

此式与无阻尼系统的(a.1.55)式相似,所以比例阻尼系统具有复系统极点 λ_r ,满足下式:

$$(a.1.60) \quad \frac{\lambda_r^2 + \lambda_r \alpha}{\lambda_r \beta + 1} = -\omega_r^2,$$

并且具有与无阻尼系统相等的纯模态向量。因此比例阻尼系统的数值计算的复杂性低于一般的粘性阻尼系统,这是我们介绍比例阻尼系统的主要理由。比例阻尼系统是根据有限元模型分析得来的无阻尼系统模型与根据实验模态分析得出的一般粘性阻尼系统模型之间的一种折衷,其频响函数还是复函数。与无阻尼系统类似,一般表达式(a.1.48)可以简化成下式:

$$(a.1.61) \quad [H(j\omega)] = \sum_{r=1}^N \frac{j2\omega_r Q_r [\Psi]_r [\Psi]_r^T}{(\sigma_r^2 + \omega_r^2 - \omega^2) - 2\sigma_r j\omega} \quad \text{或}$$

$$[H(j\omega)] = [\Psi] \left[\begin{bmatrix} \sigma_r^2 + \omega_r^2 \\ \vdots \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \end{bmatrix} - 2j\omega \begin{bmatrix} \sigma_r \\ \vdots \end{bmatrix} \right]^{-1} \begin{bmatrix} j2\omega_r Q_r \\ \vdots \end{bmatrix} [\Psi]^T$$

阻尼矩阵满足下式更广义条件的系统也具有同样的性质:

$$(a.1.62) \quad [[M]^{-1}[C]]^* [[M]^{-1}[K]]^* = [[M]^{-1}[K]]^* [[M]^{-1}[C]]^*.$$

A.1.2.7 正交性 模态坐标

本节讨论模态向量的正交性。我们将证明,这些正交性是使系统方程解耦而进行某种坐标变换的基础。这种变换使我们用另外一种方法,借助模态参数(系统极点及模态向量)来导出频响函数矩阵。我们在就一般的粘性阻尼系统讨论正交性时,将得出相当抽象的模态 a 和模态 b 的概念。对于比例阻尼或无阻尼系统的讨论,将给出模态质量、模态刚度和模态阻尼等定义,它们可以理解为在模态坐标向量空间定义的单自由度系统的质量、刚度和阻尼。

一般粘性阻尼情形

让我们从方程(a.1.29)和(a.1.32)开始,讨论一般粘性阻尼情况下模态向量的正交性问题:

$$(a.1.29) \quad (P[A] + [B])\{Y\} = \{F'\},$$

$$(a.1.32) \quad [\Phi] = \begin{bmatrix} \lambda_1 \{\Psi\}_1 & \cdots & \lambda_N \{\Psi\}_N & \lambda_1^* \{\Psi\}_1^* & \cdots & \lambda_N^* \{\Psi\}_N^* \\ \{\Psi\}_1 & \cdots & \{\Psi\}_N & \{\Psi\}_1^* & \cdots & \{\Psi\}_N^* \end{bmatrix}.$$

以 $p = \lambda_r, \{Y\} = \begin{Bmatrix} \lambda_r \{\Psi\}_r \\ \{\Psi\}_r \end{Bmatrix}$ 代入(a.1.29)式,因为它们构成一个特征值对,所以有:

$$(a.1.63) \quad (\lambda_r[A] + [B]) \begin{Bmatrix} \lambda_r \{\Psi\}_r \\ \{\Psi\}_r \end{Bmatrix} = \{0\}.$$

以 $[\Phi]$ 的另一列(例如第 s 列)的转置左乘上式,有:

$$(a.1.64) \quad \{\lambda_s \{\Psi\}_s^T \quad \{\Psi\}_s^T\} (\lambda_r[A] + [B]) \begin{Bmatrix} \lambda_r \{\Psi\}_r \\ \{\Psi\}_r \end{Bmatrix} = 0,$$

将下标记号 r 和 s 的角色互相易位,则得:

$$(a.1.65) \quad \{\lambda_r \{\Psi\}_r^T \quad \{\Psi\}_r^T\} (\lambda_s[A] + [B]) \begin{Bmatrix} \lambda_s \{\Psi\}_s \\ \{\Psi\}_s \end{Bmatrix} = 0,$$

将上式转置,得:

$$(a.1.66) \quad \{\lambda_s \{\Psi\}_s^T \quad \{\Psi\}_s^T\} (\lambda_s[A] + [B]) \begin{Bmatrix} \lambda_r \{\Psi\}_r \\ \{\Psi\}_r \end{Bmatrix} = 0,$$

从(a.1.64)式减去(a.1.66)式,得:

$$(a.1.67) \quad \{\lambda_s \{\Psi\}_s^T \quad \{\Psi\}_s^T\} ((\lambda_r - \lambda_s)[A]) \begin{Bmatrix} \lambda_r \{\Psi\}_r \\ \{\Psi\}_r \end{Bmatrix} = 0,$$

如果 $\lambda_r \neq \lambda_s$, 则上式表明, $[\Phi]$ 的不同两列第 r 列与第 s 列在被 $[A]$ 加权的条件下正交。将此正交性应用于(a.1.66)式即知, 这些向量在被 $[B]$ 加权的条件下也是正交的。这样我们便得到下列正交性条件(关于 $[A]$ 和 $[B]$ 的定义, 见(a.1.29)式):

$$(a.1.68) \quad \begin{bmatrix} \lambda_1 \{\Psi\}_1^T & \{\Psi\}_1^T \\ \vdots & \vdots \\ \lambda_N^* \{\Psi\}_N^T & \{\Psi\}_N^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [0] & [M] \\ [M] & [C] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \{\Psi\}_1 & \cdots & \lambda_N^* \{\Psi\}_N^* \\ \{\Psi\}_1 & \cdots & \{\Psi\}_N^* \end{bmatrix} = [\Lambda a],$$

$$(a.1.69)$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \{\Psi\}_1^T & \{\Psi\}_1^T \\ \vdots & \vdots \\ \lambda_N^* \{\Psi\}_N^T & \{\Psi\}_N^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -[M] & [0] \\ [0] & [K] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \{\Psi\}_1 & \cdots & \lambda_N^* \{\Psi\}_N^* \\ \{\Psi\}_1 & \cdots & \{\Psi\}_N^* \end{bmatrix} = [\Lambda b]$$

对上述正交性条件进行演算可得下述表达式:

$$(a.1.70)$$

$$[V]^T [M] [V] [\Lambda a] + [\Lambda a] [V]^T [M] [V] + [V]^T [C] [V] = [\Lambda a],$$

$$(a.1.71) \quad -[\Lambda a] [V]^T [M] [V] [\Lambda a] + [V]^T [K] [V] = [\Lambda b],$$

这里 $[V] = [\{\Psi\}_1 \cdots \{\Psi\}_N \quad \{\Psi\}_1^* \cdots \{\Psi\}_N^*]$,

$$[\Lambda] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_N & \\ 0 & & & \lambda_1^* \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda_N^* \end{bmatrix}.$$

对角矩阵 $[\Lambda]$ 和 $[\Lambda^*]$ 分别叫做模态 a 矩阵与模态 b 矩阵。模态 a_r 和模态 b_r 取决于第 r 阶模态的模态比例因子。上述这些正交性条件是变换为模态坐标 $\{q\}$ 的基础。

将变换 $\{Y\} = [\Phi]\{q\}$ 代入系统方程(a.1.29)并以 $[\Phi]^T$ 左乘之,则得:

$$(a.1.72) \quad (p[\Phi]^T[A][\Phi] + [\Phi]^T[B][\Phi])\{q\} = [\Phi]^T\{F\}.$$

模态向量的一个非常重要的特性是,上述正交性能使系统方程(a.1.72)成为一组解耦方程:

$$(a.1.73) \quad (p[\Lambda] + [\Lambda^*])\{q\} = [\Phi]^T\{F\}.$$

就所有极点对这些方程进行运算可以证明:

$$(a.1.74) \quad [\Lambda^*] = -[\Lambda][\Lambda].$$

解出方程(a.1.73)中的 $\{q\}$,并将结果乘以 $[\Phi]$,则有:

$$(a.1.75) \quad \begin{Bmatrix} p\{X\} \\ \{X\} \end{Bmatrix} = [\Phi]\{q\} \\ = \begin{bmatrix} [V][\Lambda] \\ [V] \end{bmatrix} [p[\Lambda] + [\Lambda^*]]^{-1} \begin{bmatrix} [V][\Lambda] \\ [V] \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{F\} \end{Bmatrix}.$$

此方程的下半将 $\{X\}$ 与 $\{F\}$ 相联系,给出下面的方程,与传递函数的矩阵表达式(a.1.46)非常类似:

$$(a.1.76) \quad [H] = [V][p[\Lambda] + [\Lambda^*]]^{-1}[\Lambda][V]^T, \text{ 或} \\ [H] = [V][p[\Lambda] + [\Lambda^*]]^{-1}[L].$$

无阻尼和比例阻尼情形

让我们从(a.1.55)式开始,这是关于无阻尼系统方程(a.1.53)的简化了的特征值问题。类似的道理,从该方程我们可以得到模态质量矩阵 $[m]$ 和模态刚度矩阵 $[k]$ 的定义(设 $[\Psi] = [\{\Psi\}_1 \cdots \{\Psi\}_N]$):

$$(a.1.77) \quad [\Psi]^T[M][\Psi] = [m],$$

$$(a.1.78) \quad [\Psi]^T[K][\Psi] = [k].$$

进行模态坐标变换 $\{X\} = [\Psi]\{q\}$,可得如下解耦方程组:

$$(a.1.79) \quad (-\omega^2[m] + [k])\{q\} = [\Psi]^T\{F\},$$

式中 $[k] = [m][\omega^2]$.

这样,无阻尼情况下频响函数矩阵公式就变为:

$$(a.1.80) \quad [H] = [\Psi] \left[\left[\begin{matrix} \omega_r^2 \\ \omega_r^2 \end{matrix} \right] - \omega^2 \left[\begin{matrix} I \\ I \end{matrix} \right] \right]^{-1} \left[\begin{matrix} m \\ m \end{matrix} \right]^{-1} [\Psi]^T,$$

此式与(a.1.56)式相当。

对于比例阻尼系统,由下式可定义其模态阻尼矩阵:

$$(a.1.81) \quad [\Psi]^T [C] [\Psi] = \left[\begin{matrix} c \\ c \end{matrix} \right],$$

这样,在施行坐标变换 $\{X\} = [\Psi]\{q\}$ 之后,便可得出下面一组解耦方程:

$$(a.1.82) \quad \left(p^2 \left[\begin{matrix} m \\ m \end{matrix} \right] + p \left[\begin{matrix} c \\ c \end{matrix} \right] + \left[\begin{matrix} k \\ k \end{matrix} \right] \right) \{q\} = [\Psi]^T \{F\},$$

其中的模态质量、模态刚度及模态阻尼决定于模态比例换算因子。

在特定共振点 $\lambda_r = \sigma_r + j\omega_r$ 考虑(a.1.82),可得到

$$(a.1.83) \quad (\sigma_r + j\omega_r)^2 m_r + (\sigma_r + j\omega_r) c_r + k_r = 0.$$

其实部: $2\sigma_r\omega_r m_r + c_r\omega_r = 0$,或 $c_r = -2\sigma_r m_r$. 虚部: $-(\sigma_r^2 + \omega_r^2) m_r + k_r = 0$.

比例阻尼情况下的频响函数矩阵公式就变成:

$$(a.1.84) \quad [H(j\omega)] = [\Psi] \left[\left[\begin{matrix} \sigma_r^2 + \omega_r^2 \\ \sigma_r^2 + \omega_r^2 \end{matrix} \right] - \omega^2 \left[\begin{matrix} I \\ I \end{matrix} \right] - 2j\omega \left[\begin{matrix} \sigma_r \\ \sigma_r \end{matrix} \right] \right]^{-1} \left[\begin{matrix} m \\ m \end{matrix} \right]^{-1} [\Psi]^T.$$

此式与(a.1.61)式相当。

说明

比例阻尼情况下的模态质量、模态刚度及模态阻尼,与一般情况下的模态 a 和模态 b ,事实上不过是模态振型的比例换算因子。但在比例阻尼情况中,方程经模态坐标变换解耦后(见(a.1.82)式),模态质量、模态刚度和模态阻尼代表了单自由度系统的质量、刚度和阻尼;而模态 a 与模态 b 则是比较抽象的概念。

A.1.2.8 模态向量比例换算

如前所述(见A.1.2.3节),方程(a.1.35)和(a.1.45)表明,留数 $[A]_r$ 是绝对量,而模态向量 $\{\Psi\}_r$ 是用比例因子 Q_r 换算过的向量,二者之间的关系如(a.1.45)式所示:

$$(a.1.45) \quad [A]_r = Q_r \{\Psi\}_r \{\Psi\}_r^T.$$

对于留数矩阵 $[A]_r$ 中的元素 pq (即响应自由度 p 和输入自由度 q)有:

$$(a.1.85) \quad A_{pqr} = Q_r \Psi_{pr} \Psi_{qr}.$$

比较关于一般粘性阻尼系统的传递函数矩阵表示式(a.1.76)和(a.1.46)便可证明,比例因子 Q_r 等于对应模态 a_r 的逆,或者:

$$(a.1.86) \quad \left[\begin{matrix} Q \\ Q \end{matrix} \right] = \left[\begin{matrix} a \\ a \end{matrix} \right]^{-1}.$$

在实验模态分析中,质量、刚度与阻尼矩阵($[M]$, $[K]$, $[C]$)都是未知的,所以模态 $a_r = \left[\begin{matrix} a \\ a \end{matrix} \right]$ 是不能根据(a.1.68)式来计算的。然而,测出直接频响函数,即同一个测量自由度(位置与方向)的输入与输出之间的频响函数,就可以确定第 r 阶模态的留数 A_{qqr} 。将(a.1.85)式与(a.1.86)式结合在一起便会知道怎样从频响函数测量中求出第 r 阶模态的模态 a_r ;

$$(a.1.87) \quad a_r = \frac{\Psi_{qr} \Psi_{qr}^*}{A_{qqr}}.$$

接下去的比例运算方法则是常用的:

单位模态 a :

$$(a.1.88) \quad a_r = 1, Q_r = 1, \Psi_{qr} = \sqrt{A_{qqr}}, \Psi_{pr} = \frac{A_{pqr}}{\sqrt{A_{qqr}}}.$$

单位模态系数:

假定模态 r 的第 i 个分量 Ψ_{ir} 必须为 1, 则有:

$$(a.1.89) \quad \Psi_{ir} = 1, \Psi_{pr} = \frac{A_{pqr}}{A_{iqr}}, Q_r = \frac{A_{pqr}}{\Psi_{pr} \Psi_{qr}} = \frac{1}{a_r}.$$

单位模态向量长度:

$$(a.1.90) \quad \|\{A_q\}_r\| = \sqrt{\sum_{i=1}^N A_{iqr} A_{iqr}^*},$$

$$\Psi_{pr} = \frac{A_{pqr}}{\|\{A_q\}_r\|}, Q_r = \frac{A_{pqr}}{\Psi_{pr} \Psi_{qr}} = \frac{1}{a_r}.$$

由无阻尼系统的方程(a.1.56)和(a.1.80),

$$(a.1.56) \quad [H(j\omega)] = [\Psi] \left[\begin{bmatrix} \omega_r^2 \\ \omega_r^2 \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} I \\ I \end{bmatrix} \right]^{-1} \begin{bmatrix} j2\omega_r Q \\ \end{bmatrix} [\Psi]^T$$

$$(a.1.80) \quad [H] = [\Psi] \left[\begin{bmatrix} \omega_r^2 \\ \omega_r^2 \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} I \\ I \end{bmatrix} \right]^{-1} \begin{bmatrix} m \\ m \end{bmatrix}^{-1} [\Psi]^T,$$

可以看出:

$$(a.1.91) \quad \begin{bmatrix} m \\ m \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} j2\omega_r Q \\ \end{bmatrix} \text{ 或 } Q_r = \frac{1}{j2m_r\omega_r}.$$

所以单位模态质量的比例换算方法是:

$$(a.1.92) \quad m_r = 1, Q_r = \frac{1}{j2\omega_r}, \Psi_{qr} = \sqrt{\frac{A_{qqr}}{Q_r}}, \Psi_{pr} = \frac{A_{pqr}}{Q_r \Psi_{qr}}.$$

比较比例阻尼系统的(a.1.61)和(a.1.84)式,可以规定与上述相同的比例换算方法。单位模态质量换算经常要用到,即使在非比例粘性阻尼情况下也是如此。

A.1.2.9 解析法和实验法

模态分析解析法的出发点是根据质量矩阵、阻尼矩阵和刚度矩阵来估计结构的质量、刚度和阻尼分布。这些矩阵决定了特征值问题,如(a.1.29)式所述:

$$(a.1.29) \quad \left(p \begin{bmatrix} [0] & [M] \\ [M] & [C] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -[M] & [0] \\ [0] & [K] \end{bmatrix} \right) \{Y\} = \{0\}.$$

特征值就是系统极点 $\lambda_r = \sigma_r + j\omega_r$, 既包含阻尼因子, 又包含阻尼固有频率。特征向量与模态向量 $\{\Psi\}_r$ 的关系如(a.1.32)式:

$$(a.1.32) \quad [\Phi] = \begin{bmatrix} \lambda_1 \{\Psi\}_1 & \cdots & \lambda_N \{\Psi\}_N & \lambda_1^* \{\Psi\}_1^* & \cdots & \lambda_N^* \{\Psi\}_N^* \\ \{\Psi\}_1 & \cdots & \{\Psi\}_N & \{\Psi\}_1^* & \cdots & \{\Psi\}_N^* \end{bmatrix}.$$

模态 a 矩阵由特征向量与系统矩阵来确定(见(a.1.68)式):

$$(a.1.68) \begin{bmatrix} \lambda_1 \{\Psi\}_1^T & \{\Psi\}_1^T \\ \vdots & \vdots \\ \lambda_N^* \{\Psi\}_N^{*T} & \{\Psi\}_N^{*T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [0] & [M] \\ [M] & [C] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \{\Psi\}_1 & \cdots & \lambda_N^* \{\Psi\}_N^* \\ \{\Psi\}_1 & \cdots & \{\Psi\}_N^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots \\ a \end{bmatrix}.$$

式(a.1.86), 即 $\begin{bmatrix} \vdots \\ Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots \\ a \end{bmatrix}^{-1}$, 给出了适当的比例换算因子, 从而使我们借助模态参数构造出频响函数矩阵, 见下式:

$$(a.1.48) \quad [H(j\omega)] = \sum_{r=1}^N \left(\frac{Q_r \{\Psi\}_r \{\Psi\}_r^T}{(j\omega - \lambda_r)} + \frac{Q_r^* \{\Psi\}_r^* \{\Psi\}_r^{*T}}{(j\omega - \lambda_r^*)} \right).$$

模态分析的实验法是从测量上面这个频响函数矩阵(或其一部分)开始的。然后根据(a.1.48)式(或其等效时域脉冲响应函数, 或有关的关系式如直接时间响应)用适当的参数估计方法(见 A.3 章)来估计模态参数 $\lambda_r, \{\Psi\}_r$; 按照 A.1.2.8 节提出的某种比例换算方法估计比例因子 Q_r ; 根据(a.1.86)式, 即 $\begin{bmatrix} \vdots \\ Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots \\ a \end{bmatrix}^{-1}$, 求得模态 a 矩阵的相应的值。因为在一般情况下实验模态数据库是不完整的(自由度数大大超过了估计的模态数), 所以从这些实验模态数据不可能正确估计出系统的质量、刚度和阻尼矩阵。

A.1.3 单自由度系统举例

考虑一个 $M = 2 \text{ kg}$, $C = 4 \text{ N/(m/s)}$, $K = 5000 \text{ N/m}$ 的单自由度系统, 其拉氏域的系统方程为

$$\begin{aligned} (Mp^2 + Cp + K)X(p) &= F(p), \\ (2p^2 + 4p + 5000)X(p) &= F(p). \end{aligned}$$

这里 $Z(p) = (2p^2 + 4p + 5000)$ 是动刚度。

传递函数是动刚度的倒数:

$$H(p) = \frac{1/M}{p^2 + (C/M)p + (K/M)} = \frac{1/2}{p^2 + 2p + 2500}.$$

系统极点, 即特征方程 $p^2 + 2p + 2500$ 的根, 是:

$$\lambda_{1,2} = -(C/2M) \pm \sqrt{(C/2M)^2 - (K/M)},$$

$$\lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1 - 2500} = -1 \pm j49.9900 \text{ rad/s}.$$

无阻尼固有频率 $\Omega_1 = \sqrt{K/M} = 50 \text{ rad/s}$, 或 $f_1 = \Omega_1/2\pi = 7.9577 \text{ Hz}$.

临界阻尼 $C_c = 2M \sqrt{K/M} = 200 \frac{\text{N}}{\text{m/s}}.$

阻尼比 $\zeta_1 = C/C_c = 0.02$ 或 2% .

留数 $A_1 = \frac{1/M}{j2\omega_1} = -j5.001 \times 10^{-3} \text{ s/kg}.$

因此, 传递函数的部分分式形式为:

$$H(p) = \frac{A_1}{(p - \lambda_1)} + \frac{A_1^*}{(p - \lambda_1^*)} = \frac{-j5.001 \times 10^{-3}}{(p - (-1 + j49.9900))} + \frac{j5.001 \times 10^{-3}}{(p - (-1 - j49.9900))}.$$

A.1.4 多自由度系统举例

A.1.4.1 一般粘性阻尼

考虑图 a.1.11 所示的二自由度系统,其中质量、刚度、阻尼的值如下:

$$M_1 = M_2 = 2 \text{ kg}, C_1 = 3 \text{ N/(m/s)}, C_2 = 1 \text{ N/(m/s)}, C_3 = 4 \text{ N/(m/s)},$$

$$K_1 = 4000 \text{ N/m}, K_2 = 2000 \text{ N/m}, K_3 = 4000 \text{ N/m}.$$

由这些值我们可以得到如下拉氏域的系统方程:

$$Z(p) \{X(p)\} = \left(p^2 \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + p \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6000 & -2000 \\ -2000 & 6000 \end{bmatrix} \right) \{X(p)\} = F(p)$$

传递函数矩阵是

$$[H(p)] = [Z(p)]^{-1} = \left[p^2 \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + p \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6000 & -2000 \\ -2000 & 6000 \end{bmatrix} \right]^{-1} \text{ 或}$$

$$[H(p)] = \frac{\text{adj}([Z(p)])}{|Z(p)|}$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} 2p^2 + 5p + 6000 & p + 2000 \\ p + 2000 & 2p^2 + 4p + 6000 \end{bmatrix}}{(2p^2 + 4p + 6000)(2p^2 + 5p + 6000) - (p + 2000)^2}$$

系统极点与对应的模态向量为下面的特征值问题的特征值和特征向量见(a.1.29)式: $(p[A] + [B])\{Y\} = \{0\}$:

$$\left(p \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6000 & -2000 \\ 0 & 0 & -2000 & 6000 \end{bmatrix} \right) \{Y\} = \{0\},$$

由此可得:

$$\lambda_1 = -0.87501 + 44.7135j = 44.722 \angle 91.246^\circ \text{ rad/s}$$

$$\begin{Bmatrix} \lambda_1 \{ \Psi \}_1 \\ \{ \Psi \}_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4.0321 \times 10^{-3} + 7.0693 \times 10^{-1}j \\ 1.1937 \times 10^{-2} + 7.0682 \times 10^{-1}j \\ 1.5802 \times 10^{-2} - 3.9942 \times 10^{-4}j \\ 1.5796 \times 10^{-2} - 5.7609 \times 10^{-4}j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 7.0694 \times 10^{-1} \angle 89.673^\circ \\ 7.0692 \times 10^{-1} \angle 89.032^\circ \\ 1.5807 \times 10^{-2} \angle -1.4479^\circ \\ 1.5807 \times 10^{-2} \angle -2.0886^\circ \end{Bmatrix},$$

$$\lambda_2 = -1.3750 + 63.2296j = 63.245 \angle 91.121^\circ \text{ rad/s}$$

$$\begin{Bmatrix} \lambda_2 \{ \Psi \}_2 \\ \{ \Psi \}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -9.1825 \times 10^{-2} + 7.0097 \times 10^{-1}j \\ 1.0291 \times 10^{-1} + 6.9954 \times 10^{-1}j \\ 1.1112 \times 10^{-2} + 1.2106 \times 10^{-3}j \\ -1.1094 \times 10^{-2} - 1.3864 \times 10^{-3}j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 7.0696 \times 10^{-1} \angle 97.463^\circ \\ 7.0707 \times 10^{-1} \angle -81.631^\circ \\ 1.1178 \times 10^{-2} \angle 6.2173^\circ \\ 1.1180 \times 10^{-2} \angle -172.88^\circ \end{Bmatrix}.$$

对应的复共轭值为: $\lambda_1^*, \begin{Bmatrix} \lambda_1^* \{ \Psi \}_1^* \\ \{ \Psi \}_1^* \end{Bmatrix}; \lambda_2^*, \begin{Bmatrix} \lambda_2^* \{ \Psi \}_2^* \\ \{ \Psi \}_2^* \end{Bmatrix}.$

方程(a.1.35)是借助于留数和系统极点来表示传递函数矩阵的:

$$(a.1.35) \quad [H(p)] = \sum_{r=1}^N \left(\frac{[A]_r}{(p - \lambda_r)} + \frac{[A]_r^*}{(p - \lambda_r^*)} \right),$$

其中 $[A]_r = \frac{\text{adj}([Z(\lambda_r)])}{\prod_{s=1, s \neq r}^N E(\lambda_r - \lambda_s)}$ 或 $[A]_r = P_r \text{adj}([Z(\lambda_r)])$.

在本例中:

$$\begin{aligned} [A]_1 &= (-3.1266 \times 10^{-8} - 1.3978 \times 10^{-6}j) \begin{bmatrix} 1998.6 + 67.1j & 1999.1 + 44.7j \\ 1999.1 + 44.7j & 1999.4 + 22.4j \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3.1263 \times 10^{-5} - 2.7958 \times 10^{-3}j & -2.9326 \times 10^{-9} - 2.7958 \times 10^{-3}j \\ -2.9326 \times 10^{-9} - 2.7958 \times 10^{-3}j & -3.1267 \times 10^{-5} - 2.7958 \times 10^{-3}j \end{bmatrix}, \\ [A]_2 &= (-3.1266 \times 10^{-8} + 9.8824 \times 10^{-7}j) \begin{bmatrix} 1999.1 - 31.6j & 1998.6 + 63.2j \\ 1998.6 + 63.2j & -1997.7 - 94.8j \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -3.1263 \times 10^{-5} - 1.9766 \times 10^{-3}j & 2.9326 \times 10^{-9} + 1.9771 \times 10^{-3}j \\ 2.9326 \times 10^{-9} + 1.9771 \times 10^{-3}j & 3.1267 \times 10^{-5} - 1.9772 \times 10^{-3}j \end{bmatrix} \end{aligned}$$

相应的复数共轭为: $[A]_1^*$ 和 $[A]_2^*$ 。

用式(a.1.45), 即 $[A]_r = Q_r \Psi_r \Psi_r^T$, 可以确定关于模态向量 Ψ_r 的比例常数 Q_r 。
在本例中, 方程(a.1.45)变成:

$$\begin{aligned} [A]_1 &= (0.69019 - 11.168j) \times \\ &\quad \begin{bmatrix} 2.4956 \times 10^{-4} - 1.2624 \times 10^{-5}j & 2.4939 \times 10^{-4} - 1.5413 \times 10^{-5}j \\ 2.4939 \times 10^{-4} - 1.5413 \times 10^{-5}j & 2.4920 \times 10^{-4} - 1.8200 \times 10^{-5}j \end{bmatrix} \\ [A]_2 &= (-3.6504 - 15.393j) \times \\ &\quad \begin{bmatrix} 1.2202 \times 10^{-4} + 2.6905 \times 10^{-5}j & -1.2160 \times 10^{-4} - 2.8836 \times 10^{-5}j \\ -1.2160 \times 10^{-4} - 2.8836 \times 10^{-5}j & 1.2115 \times 10^{-4} + 3.0760 \times 10^{-5}j \end{bmatrix} \end{aligned}$$

对应的复数共轭为: $[A]_1^*$ 和 $[A]_2^*$ 。

正交条件(a.1.68)和(a.1.69)式应用于本例, 得

$$\begin{aligned} [\Phi]^T [A] [\Phi] &= 10^{-2} \times \\ &\quad \begin{bmatrix} 0.55127 + 8.9201j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1.4585 + 6.1504j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.55127 - 8.9201j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1.4585 - 6.1504j \end{bmatrix} \\ [\Phi]^T [B] [\Phi] &= \begin{bmatrix} 3.9933 - 0.16844j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3.8688 + 1.0068j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3.9933 + 0.16844j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3.8688 - 1.0068j \end{bmatrix} \end{aligned}$$

读者可以验证一下, 这些结果与(a.1.83)式 $[\Lambda Q_\Lambda] = [\Lambda a_\Lambda]^{-1}$ 及(a.1.73)式 $[\Lambda b_\Lambda] = -[\Lambda a_\Lambda][\Lambda \Lambda_\Lambda]$ 是相吻合的。

A.1.4.2 比例粘性阻尼

设图 a.1.11 中二自由度系统的质量、阻尼、刚度分别具有下列的值：

$$M_1 = M_2 = 2 \text{ kg}, C_1 = 3 \text{ N/(m/s)}, C_2 = 2 \text{ N/(m/s)}, C_3 = 3 \text{ N/(m/s)},$$

$$K_1 = 4000 \text{ N/m}, K_2 = 2000 \text{ N/m}, K_3 = 4000 \text{ N/m}.$$

这是一个比例阻尼系统，方程(a.1.57) $[C] = \alpha[M] + \beta[K]$ 中的系数 α 和 β 为：

$$\alpha = \frac{1}{2} \text{ 1/s}, \beta = \frac{1}{1000} \text{ s}$$

对应的特征值和特征向量是：

$$\lambda_1 = -0.7500 + 44.7151j = 44.721 \angle 90.961^\circ \text{ rad/s},$$

$$\begin{Bmatrix} \lambda_1 \{\Psi\}_1 \\ \{\Psi\}_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2.1660 \times 10^{-1} + 6.7293 \times 10^{-1}j \\ -2.1660 \times 10^{-1} + 6.7293 \times 10^{-1}j \\ 1.5126 \times 10^{-2} + 4.5903 \times 10^{-3}j \\ 1.5126 \times 10^{-2} + 4.5903 \times 10^{-3}j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 7.0693 \times 10^{-1} \angle 107.84^\circ \\ 7.0693 \times 10^{-1} \angle 107.84^\circ \\ 1.5807 \times 10^{-2} \angle 16.881^\circ \\ 1.5807 \times 10^{-2} \angle 16.881^\circ \end{Bmatrix}$$

$$\lambda_2 = -1.7500 + 63.2213j = 63.246 \angle 91.586^\circ \text{ rad/s},$$

$$\begin{Bmatrix} \lambda_2 \{\Psi\}_2 \\ \{\Psi\}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2.0629 \times 10^{-1} + 6.7626 \times 10^{-1}j \\ -2.0629 \times 10^{-1} - 6.7626 \times 10^{-1}j \\ 1.0598 \times 10^{-1} - 3.5563 \times 10^{-3}j \\ -1.0598 \times 10^{-1} + 3.5563 \times 10^{-3}j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 7.0702 \times 10^{-1} \angle 73.063^\circ \\ 7.0702 \times 10^{-1} \angle -106.96^\circ \\ 1.1179 \times 10^{-2} \angle -18.549^\circ \\ 1.1179 \times 10^{-2} \angle 161.45^\circ \end{Bmatrix}$$

对应的复数共轭为： $\lambda_1^*, \begin{Bmatrix} \lambda_1^* \{\Psi\}_1^* \\ \{\Psi\}_1^* \end{Bmatrix}; \lambda_2^*, \begin{Bmatrix} \lambda_2^* \{\Psi\}_2^* \\ \{\Psi\}_2^* \end{Bmatrix}$ 。

正如 A.1.2.6 节所说，模态向量 $\{\Psi\}_r$ 是纯模态向量：它的元素之间的相位或者相等（如模态 1），或者正好相差 180° （如模态 2）。如果对他们进行适当的比例换算，它们则可以等于无阻尼情形中的模态向量（见 a.1.4.3 节）。系统极点是复数的，它们的模等于无阻尼系统的极点的模（见 a.1.4.3 节）。这种情况对于一般粘性阻尼系统是不对的。

至于其他一些量，如留数、模态 a 和模态 b 、模态比例因子等，可以像一般粘性阻尼情形那样进行计算。

A.1.4.3 无阻尼

假定图 a.1.11 的二自由度系统没有阻尼，而质量和刚度的值如下：

$$M_1 = M_2 = 2 \text{ kg}$$

$$K_1 = 4000 \text{ N/m}, K_2 = 2000 \text{ N/m}, K_3 = 4000 \text{ N/m},$$

则此系统的特征值问题如方程(a.1.55) $((p^2[M] + [K])\{X\} = \{0\})$ 所示，纯虚数的系统极点和对应的模态向量是：

$$\lambda_1 = 44.721 j \text{ rad/s}, \{\Psi\}_1 = \begin{Bmatrix} 0.7071 \\ 0.7071 \end{Bmatrix},$$

$$\lambda_2 = 63.246 j \text{ rad/s}, \{\Psi\}_2 = \begin{Bmatrix} 0.7071 \\ -0.7071 \end{Bmatrix}.$$

相应的复数共轭为: $\lambda_1^*, \{\Psi\}_1^*$; $\lambda_2^*, \{\Psi\}_2^*$. 如前所述, 该系统的模态向量及系统极点的模与比例阻尼系统的相同。

用式(a.1.77)和(a.1.78)(即 $[\Psi]^T[M][\Psi] = \begin{bmatrix} m \\ \end{bmatrix}$ 和 $[\Psi]^T[K][\Psi] = \begin{bmatrix} k \\ \end{bmatrix}$) 可以确定模态质量和模态刚度:

$$\begin{bmatrix} 0.7071 & 0.7071 \\ 0.7071 & -0.7071 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.7071 & 0.7071 \\ 0.7071 & -0.7071 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 0.7071 & 0.7071 \\ 0.7071 & -0.7071 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 6000 & -2000 \\ -2000 & 6000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.7071 & 0.7071 \\ 0.7071 & -0.7071 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4000 & 0 \\ 0 & 8000 \end{bmatrix}.$$

根据(a.1.80)式和(a.1.56)式, 频响函数矩阵是:

$$[H(j\omega)] = \sum_{r=1}^N \frac{\{\Psi\}_r \{\Psi\}_r^T}{m_r(\omega_r^2 - \omega^2)} = \sum_{r=1}^N \frac{j2\omega_r Q_r \{\Psi\}_r \{\Psi\}_r^T}{(\omega_r^2 - \omega^2)}$$

$$[H(j\omega)] = \frac{0.5 \begin{Bmatrix} 0.7071 \\ 0.7071 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.7071 & 0.7071 \end{Bmatrix}^T}{2000 - \omega^2} + \frac{0.5 \begin{Bmatrix} 0.7071 \\ -0.7071 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.7071 & -0.7071 \end{Bmatrix}^T}{4000 - \omega^2}.$$

根据式(a.1.91), 相应的模态比例因子是:

$$Q_1 = -5.5902 \times 10^{-3}j, Q_2 = -3.9528 \times 10^{-3}j$$

A.1.5 结 论

本章讨论了模态分析的基本理论。我们已经说明, 一个结构的动力学特性可以用它的模态参数加以完整地描述。这些模态参数可以从一个结构模型的已知的质量矩阵、刚度矩阵和阻尼矩阵导出(解析法), 也可以从测量出来的这个结构的频响函数导出(实验法)。本章最后给出了一个简单的数值例子, 以演示这些理论。

A.2 章 (数字)信号处理:基本理论

A.2.0 引言

在现代工程中,透彻了解物理现象是第一要义。研究这些物理现象最常用的方法是先假定一个数学模型,该模型的特性必须通过对系统进行测量而确定。我们研究的系统大多是动态系统,它们的动态特性不是直接确定,而常常是根据系统对给定输入(激励)的响应观测估计出来的。在测量这些系统的输入与输出时,需要适当的仪器设备。数字系统诞生之前,处理输入输出信号只能采用专门的模拟系统如模拟滤波器和相关函数分析仪等。然而最近,随着数字处理器及数据采集系统的出现,信号处理技术的应用几乎不受任何限制。例如,利用精巧的数字信号处理(DSP)板,可以使每一台 PC 机变成功能强大的信号处理器,其性能远远胜过以往的模拟系统。因此,数字信号处理已经成了系统分析中一种非常重要的工具。由于有很多优秀的著作(如参考文献 a.2.1 至 a.2.8)对数字信号处理及傅立叶分析有着精辟的论述,所以本章将只是综述一下这方面的基本理论。

用于系统识别的信号可以像表 a.2.1 那样进行分类(见参考文献 a.2.9)。稳态信号是其统计特性不随时间而变化的信号,它们既可以是确定性的,也可以是随机性的。最重要的一族确定性稳态信号是周期性信号。伪随机信号是按周期方式重复的随机信号。

非稳态信号可以粗略分成连续非稳态信号和瞬态信号。瞬态信号可以定义为在观察期间内起始于零且终止于零的信号。这两种非稳态信号并为一类加以说明,而连续非稳态信号将只用较少篇幅予以分析。

表 a.2.1 信号分类

信 号			
稳 态 (平稳)		非 稳 态	
确定性信号	随机信号	连续信号	瞬态信号
周期信号 准周期信号			
伪随机信号			

信号处理的目的是从信号中提取尽可能多的有价值的信息,因此我们一般总是在几个不同的域中来研究信号。很显然,测量得到的信号是时域函数,为研究它们的频率成分,在频域中考察它们会更容易些。欲在这两种域中研究信号,就应当有一种能够使信号从时域到频域、从频域到时域来回转换的“简便易行”的办法。傅立叶变换和傅立叶反变换就是这样的工具,因此傅立叶变换就成了信号处理的主要课题之一。

关于数字信号处理基本理论部分讨论安排如下:

(1) 定义并简单讨论适用于各类信号(周期信号、非周期信号、采样信号……)的傅立叶级

数和傅立叶变换。我们将给出一些插图来说明不同变换式之间的关系以及信号类型对变换的影响。

(2)在讨论傅立叶变换时定义几种典型的信号分析参数,并在 A.2.2 节中总结一下这些参数及其相互关系。

(3)A.2.3 节研究傅立叶变换的主要性质及关系式。虽然这些性质是就一般傅立叶变换而言的,但对所有类型的傅立叶变换均正确。

(4)迭混和泄漏是数字信号处理的两大误差源,它们是由于采样需要以及观察时间有限而引起的。避免或减小这些误差的方法将在 A.2.4 节中讨论。

(5)最后简要提一下另外一些有关的变换,即拉普拉斯变换和 z 变换。

然后本章继续讨论几个时间函数和频率函数,特别对频响函数和相干函数将给予更多的关注。

A.2.1 各类信号的傅立叶变换

我们在定义并讨论各种变换之前,重温一下指数函数与三角函数的某些关系式或许有所裨益:

$$(a.2.1) \quad e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta,$$

$$(a.2.2) \quad \cos\theta = \frac{(e^{j\theta} + e^{-j\theta})}{2},$$

$$(a.2.3) \quad \sin\theta = \frac{(e^{j\theta} - e^{-j\theta})}{2j}.$$

A.2.1.1 周期信号

十八世纪后叶,J.B.傅立叶已经证明,一个周期性时间函数可以表示成一系列频率间隔相等的正弦分量之和:

$$(a.2.4) \quad g(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} G(k\Delta f)e^{j2\pi k\Delta f t},$$

其中 $G(k\Delta f)$:傅立叶系数

$$(a.2.5) \quad G(k\Delta f) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} g(t) e^{-j2\pi k\Delta f t} dt$$

式中 t :时间变量;

k :频率步进计数整数;

Δf :频率间隔,或称频率分辨率, $\Delta f = \frac{1}{T}$;

j :虚数单位, $j^2 = -1$;

T :周期, $T = \frac{1}{\Delta f}$.

这组 $G(k\Delta f)$ 的值叫做时间函数 $g(t)$ 的频谱,周期信号的频谱是离散的,且一般是复数。

作为一个例子,我们考虑图 a.2.1 的周期矩形脉冲序列,它的周期为 T ,脉冲宽度为 τ ,幅值为 A 。应用(a.2.5)式,其傅立叶系数(即频谱)为:

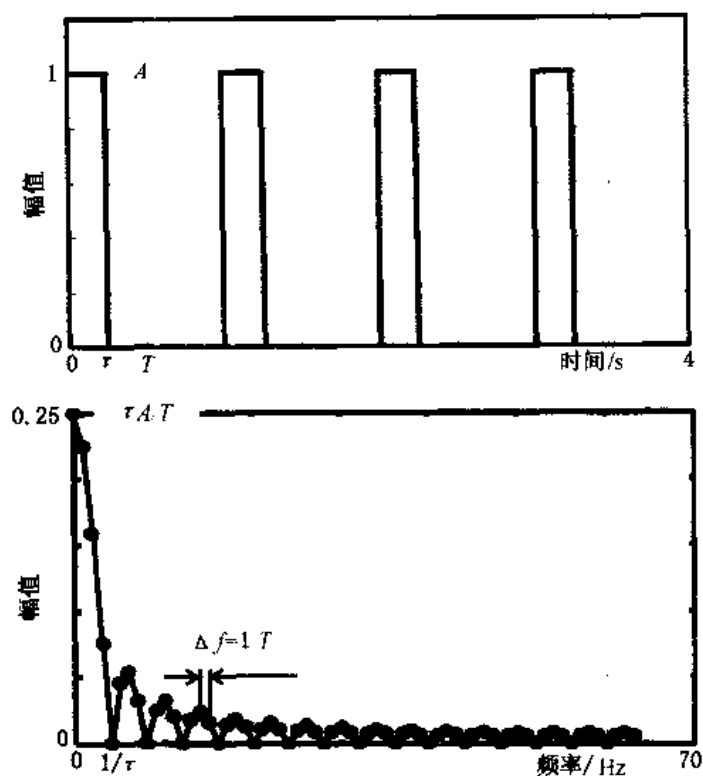


图 a.2.1 矩形脉冲序列和它的幅值谱

$$G(k\Delta f) = \frac{\tau A \Delta f (\sin \pi k \tau \Delta f)}{\pi k \tau \Delta f}.$$

图 a.2.1 只表示出了这个频谱的正频率轴部分的幅值,而负频率轴部分是与之对称的。此例说明,脉冲宽度愈窄(τ 愈小),频带中的中心瓣则愈宽(即带宽愈大);周期 T 愈大,则能量愈多地集中在低频范围内。

A.2.1.2 非周期函数

非周期函数,如瞬态信号与随机信号等,可以看成是周期 T 趋于无穷大的周期函数。在 (a.2.4) 和 (a.2.5) 式中令 T 趋于无穷大,则得傅立叶变换表达式为:

$$(a.2.6) \quad g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(f) e^{j2\pi ft} df \quad \text{和}$$

$$(a.2.7) \quad G(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

$G(f)$ 叫做傅立叶(正)变换, $g(t)$ 叫做傅立叶反变换。非周期函数的频谱是连续的,一般也是复值的。

图 a.2.2 表示一个矩形时间脉冲及其对应的频率函数(仅画出正频率部分)。宽度为 τ 的单个矩形脉冲,其傅立叶变换是 $G(f) = A\tau (\sin \pi \tau f) / \pi \tau f$, 它在 n/τ ($n \neq 0$) 处的值等于零。

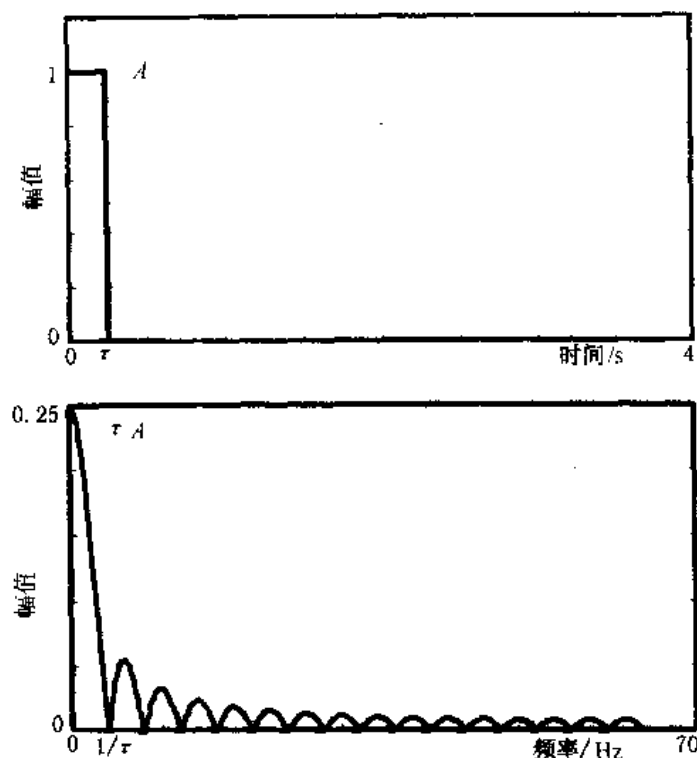


图 a.2.2 矩形脉冲及其幅值谱

A.2.1.3 采样时间函数

使用数字计算机时,一个必要的步骤是对连续时间函数进行采样。这就意味着实在的时间数据被一个时间序列,即一系列离散的等距时间点上的值所代表。这样的处理便导致如下形式的傅立叶变换(称为离散傅立叶变换(DFT)):

$$(a.2.8) \quad g(n\Delta t) = \left(\frac{1}{f_s}\right) \int_{-f_s/2}^{+f_s/2} G(f) e^{j2\pi f n\Delta t} df \quad \text{和}$$

$$(a.2.9) \quad G(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(n\Delta t) e^{-j2\pi f n\Delta t}.$$

其中 n : 时间采样计数整数;

Δt : 时间采样间隔, $\Delta t = 1/f_s$;

f_s : 采样频率, $f_s = 1/\Delta t$.

式(a.2.9)表明,对采样后的(离散的)时间函数进行傅立叶变换,得到的结果是频域中的周期函数。这跟周期时间信号(见 A.2.1.1 节)的情形类似,不过是时域和频域调换了一下。

将这种采样施于矩形脉冲,可得如图 a.2.3 所示的结果。

A.2.1.4 采样时间信号及其变换

在实际测量中,我们不可能测出持续时间为无限长的时间信号,而只能选测该信号的一部分(长度为 T 的时间窗或时间记录)。所以我们假定,被捕捉到的信号以 T 为周期重复其自身,从而得到一个周期性时间函数。A.2.1.1 节已经指出,周期时间函数的频谱是离散的。将

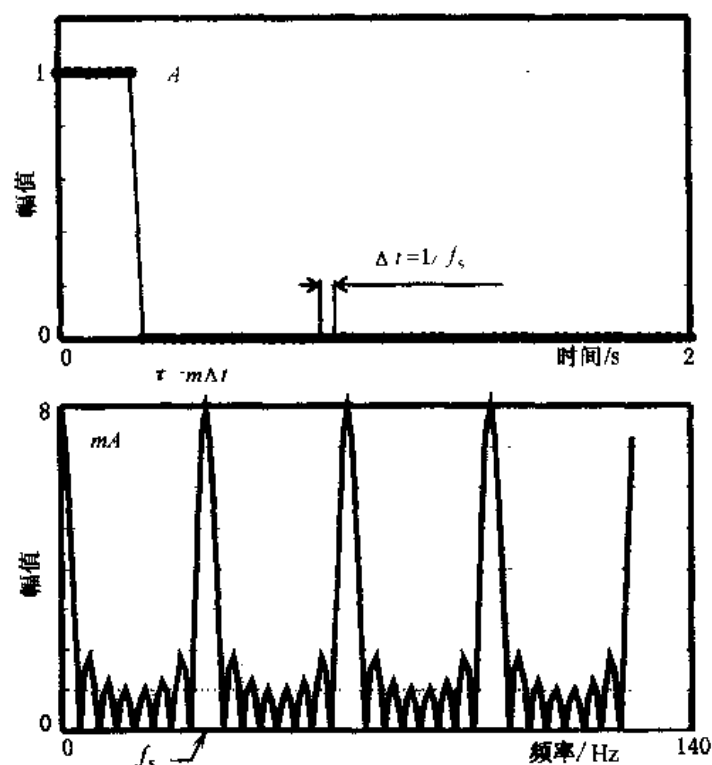


图 a.2.3 采样矩形脉冲及其幅值谱

这种周期性假设与信号采样相结合,即可得到如下时域、频域都是离散的离散傅立叶变换对的定义:

$$(a.2.10) \quad g(n\Delta t) = \sum_{k=0}^{N_s-1} G(k\Delta f) e^{j2\pi nk/N_s},$$

$$(a.2.11) \quad G(k\Delta f) = \left(\frac{1}{N_s}\right) \sum_{n=0}^{N_s-1} g(n\Delta t) e^{-j2\pi nk/N_s},$$

式中 N_s : 采样个数;

$$T = N_s \Delta t;$$

$$N_s \Delta f = f_s.$$

图 a.2.4 表示对矩形脉冲进行的离散傅立叶变换。

如果直接计算离散傅立叶变换,需要 N_s^2 次运算,而进行快速傅立叶变换(FFT),运算次数则减少到 $N_s \log_2 N_s$ 次。FFT 算法要求数据点数等于 2 的整数次幂。FFT 算法是现代数字信号分析仪(FFT 分析仪)的核心。

A.2.2 一些分析参数

我们把在前面几段中遇到的一些参数总结如下:

T : 时间周期或采样长度。在这段时间内要对被分析的信号依次取 N_s 个等间隔的采样。在大多数傅立叶分析仪中, N_s 被限定为 2 的若干次方(如 1 024)。

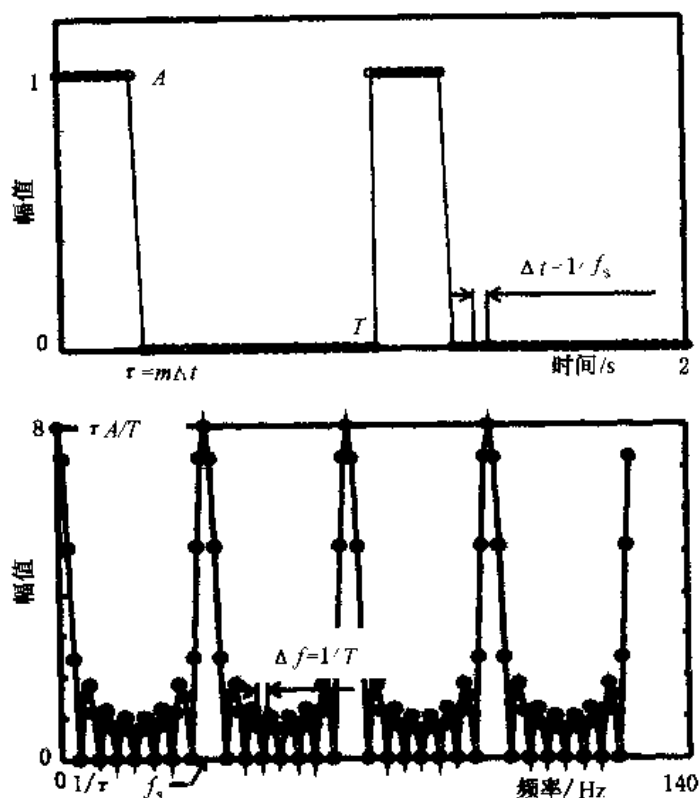


图 a.2.4 采样周期矩形脉冲及其幅值谱

关系式: $T = N_s \Delta t = 1/\Delta f$ 。

f_s : 采样频率。模拟信号按此频率被采样并被数字化(模-数转换, ADC)。

关系式: $f_s = 1/\Delta t = N_s \Delta f$; 另外, Shannon 采样定理要求 $f_s \geq 2f_{\max}$ (见 A.2.4.1 节)。

Δt : 采样间隔。每隔一段时间 Δt 对信号采样一次。

关系式: $\Delta t = T/N_s = 1/f_s$ 。

Δf : 频率间隔, 或叫频率步长, 是频率信号中的谱线间隔。关系式为:

$$\Delta f = 1/T = f_s/N_s$$

因此, 频率步长越小(也就是频率分辨率越高), 如果测量平均次数保持不变, 则测量时间越长。

f_{\max} : 最高频率。它是时间信号中所含有的或允许含有的最高频率。Shannon 采样定理指出, $f_{\max} \leq f_s/2$ 。

N_s : 时间采样点数, 或叫谱线总数。

关系式: $N_s = T/\Delta t = f_s/\Delta f$ 。

A.2.3 性质与关系式

本节总结傅立叶变换的某些重要性质, 我们常常根据这些性质讨论信号的时域表示与频域表示之间的有趣的关系。

A.2.3.1 叠加性质

如果 $G_1(f)$ 和 $G_2(f)$ 分别是 $g_1(t)$ 和 $g_2(t)$ 的傅立叶变换, 则 $G_1(f) + G_2(f)$ 就是 $g_1(t) + g_2(t)$ 的傅立叶变换。这个性质是信号平均的基础(见 A.2.6.3 节)。

A.2.3.2 比例相乘性质

如果 $G(f)$ 是 $g(t)$ 的傅立叶变换, 则 $aG(f)$ 为 $ag(t)$ 的傅立叶变换。这个性质意味着无论在时域校准还是在频域校准, 均可得到同样的结果(见 B.2.1 节)。

A.2.3.3 时间变换性质

如果 $G(f)$ 是 $g(t)$ 的傅立叶变换, 则 $G(f/a)/|a|$ 是 $g(at)$ 的傅立叶变换。这个性质说明, 变化较迅速的时间信号, 其频谱中含有更高的频率成分, 反之亦然。典型的例子是磁带收录机转速不对时出现的情况, 且要注意, 这时频域中的信号幅度也改变了。

A.2.3.4 时移性质

如果 $g(t)$ 的傅立叶变换是 $G(f)$, 则 $g(t - t_0)$ 的傅立叶变换为 $G(f) e^{-j2\pi f t_0}$ 。可见时移并不影响频率信号的幅值, 只是引起相位移($-2\pi f t_0$)。

A.2.3.5 频移性质和细化变换

时移性质倒过来可以这样说: 若 $G(f)$ 是 $g(t)$ 的傅立叶变换, 那么 $G(f - f_0)$ 就是 $g(t) e^{j2\pi f_0 t}$ 的傅立叶变换。这个过程是无线电技术中经常用到的信号幅度调制以及选带傅立叶变换或细化傅立叶变换的基础。细化变换允许我们选择一个感兴趣的频带(它不是基带, 即不是从零开始的频带)进行处理, 这样即使在高频情况下也能提高频率分辨率。实时细化分析是最常用的技术。有时也选择另外一些技术如离线分析或非破坏性细化处理等(见参考文献 a.2.9), 但这里不予讨论。

以 $e^{-j2\pi f_0 t}$ 对原始时间信号进行调幅处理, 便使频率原点移到 f_0 , 并得到一个复数时间函数。进行细化 FFT 时, 原始时间信号是数字化的采样序列, 并且要使 f_0 与感兴趣的频带的起

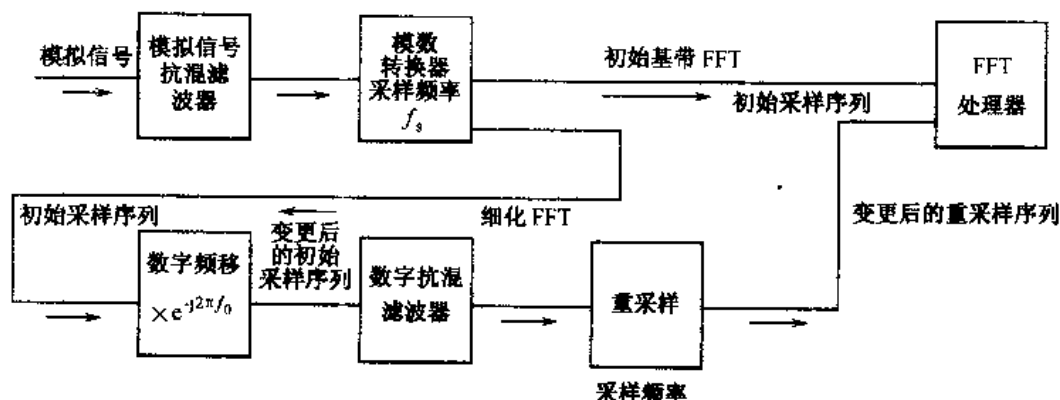


图 a.2.5a 细化变换原理(1)

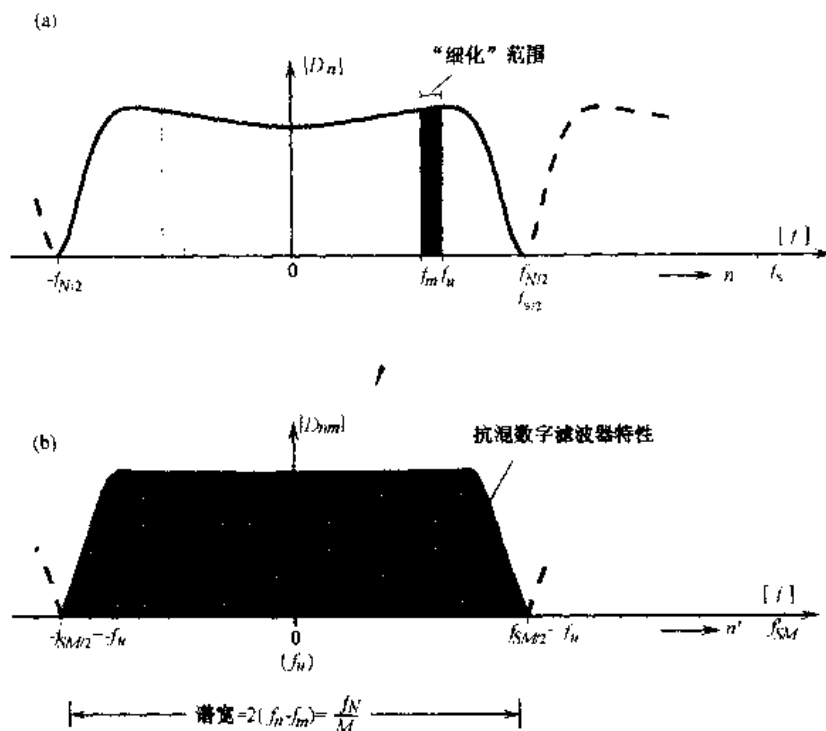


图 a.2.5b 细化变换原理(2)

始频率相对应。这是细化变换的第一步。第二步则是提高频率分辨率。为了完成“细化”，要求对已经改变了的(复数)采样序列进行重采样，而且在执行 FFT 之前必须再加入一个抗混滤波器(A.2.4.1 节)。要保证频率分辨率(Δf)与时间窗的长度 T 之间的关系依然不变： $\Delta f = 1/T$ 。图 a.2.5 是细化变换的原理。

A.2.3.6 能量关系

下面的能量关系式叫做帕塞瓦尔(Parceval)定理：

$$(a.2.12) \quad E = \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |G(f)|^2 df.$$

式中 $|G(f)|^2$ ：功率谱密度函数。

尽管各种傅立叶变换之间有许多相似之处，但这里我们应当提一提它们的某些差别。当频谱连续时(式(a.2.7)，(a.2.9))，频谱分量具有“谱密度”的量纲，因此幅值平方谱的单位是单位频带上的能量，而且必须在某一有限带宽内可积从而给出有限的能量值。在离散谱的情况下，幅值平方谱是直接按功率单位量度的。

比较式(a.2.7)和(a.2.5)可以发现它们之间的另一个明显的差别：(a.2.7)式适用于瞬态信号(具有确定的总能量)；相反，(a.2.5)式适用于周期信号，并且由于除以 T ，使得结果规格化了，因而与所考虑的时间长度(nT)无关。因此，将(a.2.7)式中的频率分量的幅值加以平方所得到的谱 $|G(f)|^2$ ，具有“能量谱密度”的量纲而不是“功率谱密度”的量纲。

A.2.3.7 积分与微分性质

如果 $g(t)$ 的傅立叶变换是 $G(f)$, 那末 $dg(t)/dt$ 的傅立叶变换是 $j2\pi fG(f)$, 而 $\int_{-\infty}^t g(\tau)d\tau$ 的傅立叶变换则是 $G(f)/j2\pi f$ 。时域中积分对应于频域中除以 $j2\pi f$, 时域中微分对应于频域中乘以 $j2\pi f$ 。

A.2.3.8 卷积性质

两个函数 $a(x)$ 和 $b(x)$ 的卷积积分 $c(x)$ 定义为:

$$(a.2.13) \quad c(x) = \int_{-\infty}^{\infty} a(\chi)b(x-\chi)d\chi = a(x) * b(x)$$

设 $h(t)$ 是脉冲响应, 即系统对 δ 函数的响应, 可以证明, 该系统对输入 $f(t)$ 的响应 $g(t)$ 就是 $f(t)$ 与 $h(t)$ 的卷积:

$$(a.2.14) \quad g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau = h(t) * f(t)$$

傅立叶分析中卷积定理说的是, 时域中的卷积与频域中的乘积相对应, 反之亦然; 如果 $g(t) = h(t) * f(t)$, 则 $G(f) = H(f) \cdot F(f)$ 。所以频响函数 $H(f)$ 就是作为频率函数的响应与输入的比值。卷积定理是傅立叶变换在信号处理方面得以广泛应用的主要原因之一, 因为像卷积这样复杂的计算一经变换就成了简单的乘法运算。

为减小泄漏误差(见 A.2.4.2. 和 A.2.4.3. 节)而采用加权函数或者窗函数, 是卷积定理的又一个典型应用。时间函数乘以适当的窗函数对应于频域中它们各自的傅立叶变换的卷积。

A.2.4 误差与窗

在数字信号分析过程中可能出现各种各样的误差, 主要有过载、数字变换噪声、量化、动态范围限制等因素引致的误差。但最重要的两类误差是迭混与泄漏。

A.2.4.1 迭混

迭混现象源于时间信号必须被采样这样一个事实。采样过程中信号中的高频分量有可能导致频谱中产生幅值误差与频率误差。如果欲分析的信号中最高频率 f_{\max} 不满足 Shannon 采样定理

$$(a.2.15) \quad f_{\max} \leq f_s/2$$

其中 f_s 为采样频率, 那么高于 $f_s/2$ 的频率将作为低于 $f_s/2$ 的频率而出现。一个众所周知的例子是电影中的车轮的视在转速: 采样频率 (= 每秒图像幅数) 过低时, 车轮看起来像是转得极慢或者倒转。图 a.2.6 说明为什么输出频率看起来好像与实际频率和采样频率有关: $f_{\text{out}} = nf_s \pm f_1$, 其中 $f_1 < f_s/2$ 。

图 a.2.7 表示按照 $f_s = 5 \text{ Hz}$ 的采样频率对三个正弦波 ($f_1 = 1 \text{ Hz}$, $f_2 = 4 \text{ Hz}$, $f_3 = 6 \text{ Hz}$) 进

行采样,采样的结果却是相同的。

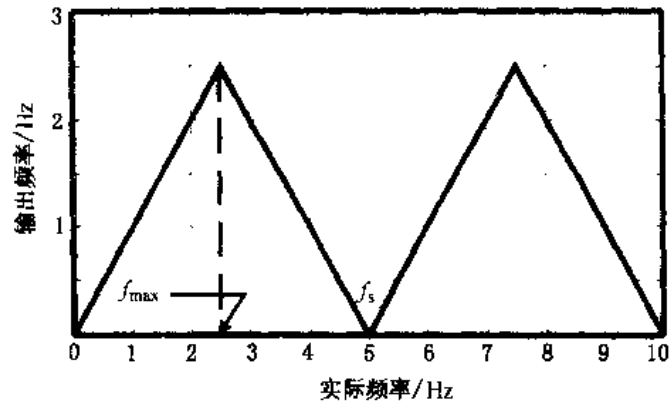


图 a.2.6 频率迭混

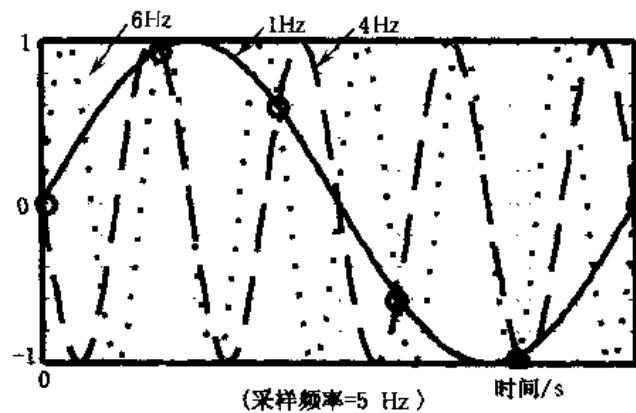


图 a.2.7 迭混:三个正弦波的频率分别为 1 Hz,4 Hz,6 Hz, 采样频率为 5 Hz

Shannon 采样定理还有一种解释方法,如图 a.2.8. 所示(只考虑正频率轴)。假定时间信号的傅立叶谱中的最高频率为 f_{\max} 。正如 A.2.1.3 节所述(见图 a.2.3),对图中的信号采样会得到周期为 f_s 的周期性频谱。当 $f_s > 2f_{\max}$ 时,频谱中不会出现重叠(图 a.2.8a);但当 $f_s < 2f_{\max}$ 时,一部分频谱将重叠在一起(图 a.2.8b),给出错误结果。

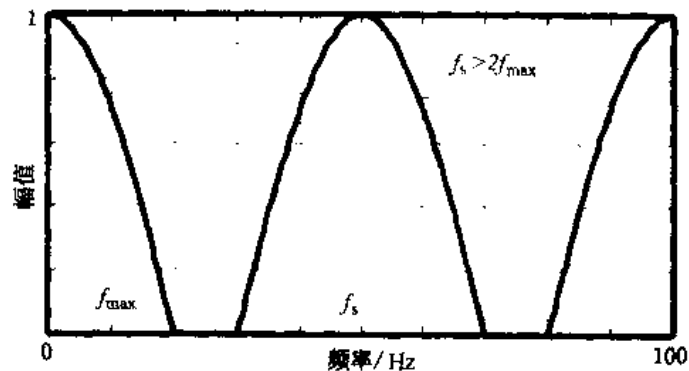


图 a.2.8a 采样时间信号的频谱($f_s > 2f_{\max}$)

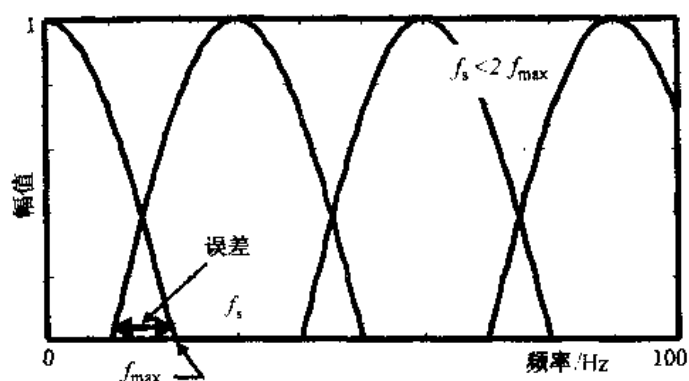


图 a.2.8b 迭混:由于采样频率过低($f_s < 2f_{\max}$)而引起的频谱重叠

滤除所有高于 $f_s/2$ 的频率分量即可避免迭混现象,为此我们当然可以选用适当的激励信号(假定系统线性很好)(见 B.3 章),但通常的办法是采用截止特性陡峭的低通滤波器。因为任何滤波器都不是理想的,不可能在 $f_s/2$ 处戛然而止,不可能把所有 $f_s/2$ 以上的频率衰减到零而对 $f_s/2$ 以下的频率没有影响,所以滤波器的截止频率常常设置在 f_s 的 40% (即 f_{\max} 的 80%)。

A.2.4.2 泄 漏

泄漏误差产生的根源是:测量必须在有限的观测时间 T 内进行。离散傅立叶变换假定:被观测信号在观测时段 T 内是周期的;如果此假设条件不满足,则会产生泄漏误差。图 a.2.9 和图 a.2.10 表示对一个余弦波的测量过程,在观测窗 T 内它分别为周期性的($f_1 = n_1/T$)和非周期性的($f_2 \neq n/T$)。

图 a.2.9a 和图 a.2.10a 表示同一个长度为 T 的观测窗及其傅立叶变换;该窗的频谱在所有 n/T 的频率点上都是零值(也可以参考图 a.2.2)。图 a.2.9b 画出了一个连续的余弦波及其频谱;其谱是位于余弦波频率点 f_1 处的一条竖线。图 a.2.9c 表明图 a.2.9a 和图 a.2.9b 中的两个时间信号相乘产生了一个加窗余弦波;在频域中这种加窗对应的是图 a.2.9a 和 a.2.9b 中的两个频率信号的卷积(参见 A.2.3.8 节)。图 a.2.10c 表示同样的情形。正如我们所看到的,此余弦波在观测窗内是周期性的。如果假设时间信号是以 T 为周期的周期信号(图 a.2.9d),就会产生谱线位于 n/T 处的离散傅立叶谱(见 A.2.1.1 节和图 a.2.1),除 f_1 之外所有谱线都位于图 a.2.9c 连续谱的零点上,因此说这一结果是图 a.2.9b 中正确谱的准确再现。

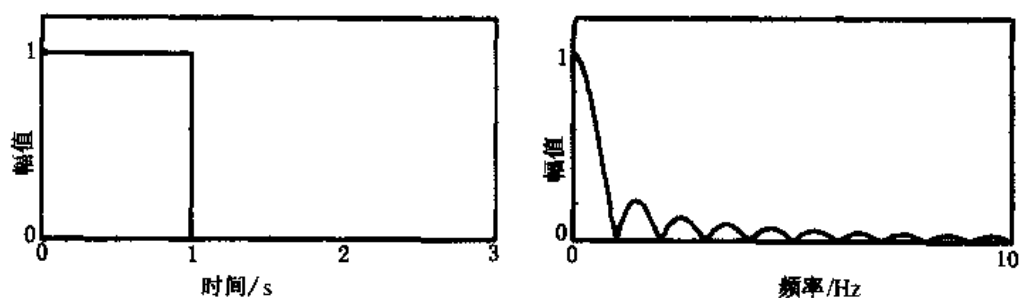


图 a.2.9a 窗;观测时间 T

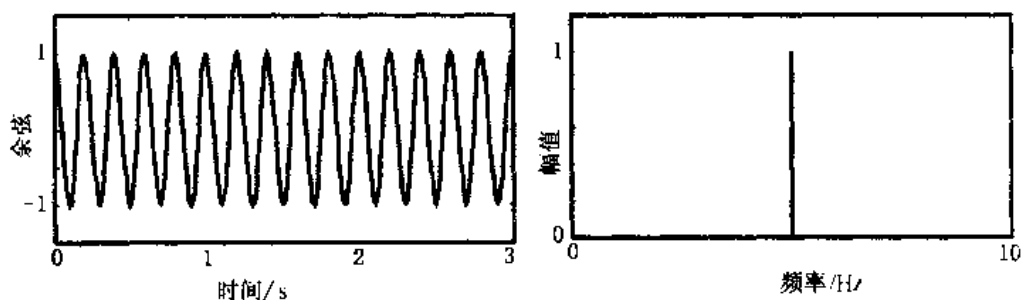


图 a.2.9b 连续余弦波($f_1 = n_1/T$)

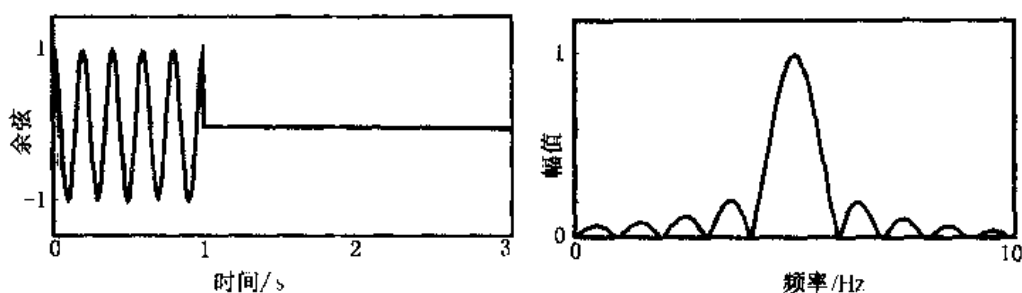


图 a.2.9c 加窗余弦波

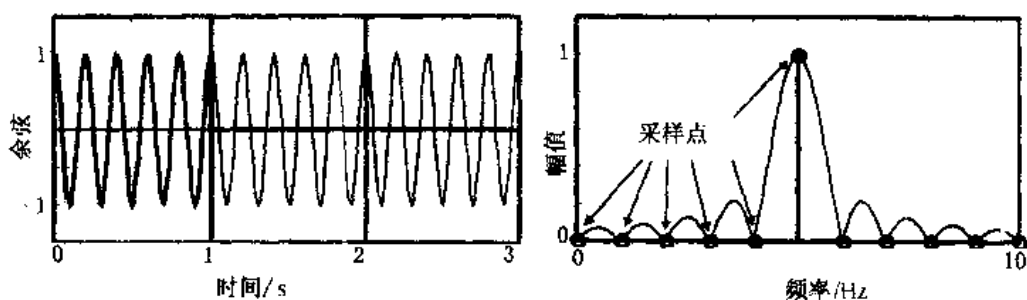


图 a.2.9d 周期性假设

在图 a.2.10 中,余弦波在观测窗内是非周期的,结果使图 a.2.10c 的频谱的中心瓣不位于 $1/T$ 的整数倍处。而根据周期性假设所得到的谱线也不处于该谱的零点上(图 a.2.10d),因而离散谱也不是图 a.2.10b 中标准谱的准确再现。频率 f_2 上的实际能量散布(泄漏)到附近(周期性)频率上,引起严重的幅值误差。这个误差随非周期性程度(见 A.2.4.3 节)而变。时域中信号在观测窗内的非周期性引起在 T 的所有整数倍处的不连续性;假设的(周期)信号不同于准确的信号(图 a.2.10b),因而误差将不可避免。

举上面这个简单的余弦例子意在说明泄漏现象。因为任何信号均可以表示成正、余弦信号的线性组合,所以只要信号中含有非周期频率分量,就会有泄漏发生。

解决泄漏问题的惟一办法是确保信号的周期性,或者在观察窗内能够完整地观测。但一般说来这种要求是很难实现的。对于具有良好线性特性的系统,我们用一个周期信号对其进行激励可以实现上述条件。利用像猝发随机这样的信号作为激励亦可减轻泄漏问题

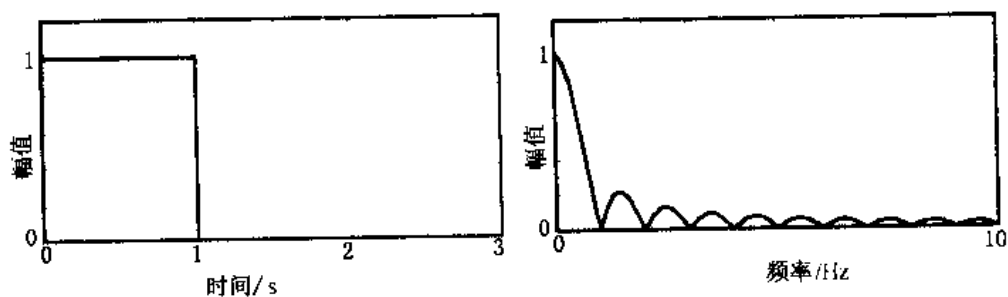


图 a.2.10a 窗: 观测时间 T

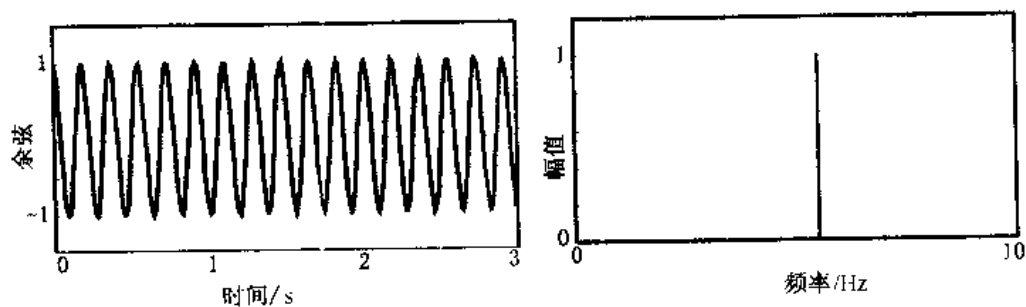


图 a.2.10b 连续余弦波 ($f_1 \neq n/T$)

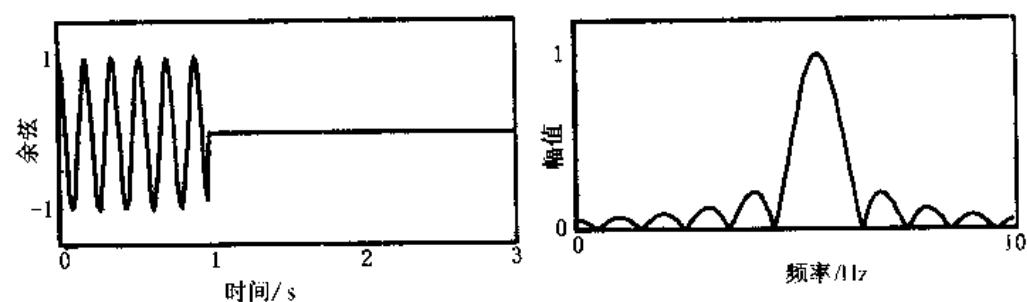


图 a.2.10c 加窗余弦波

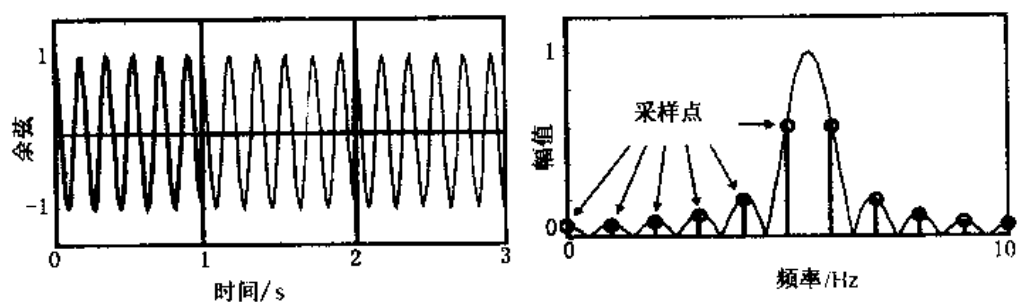


图 a.2.10d 周期性假设

(见 B.3 章)。减小频率步长 Δf 会增加观测时间 T , 从而也将改善信号的周期性。利用与上面提到的矩形窗不同的其他时间窗, 也能一定程度地解决泄漏问题。

A.2.4.3 窗

在数字信号处理中不可避免地要使用时间窗。测量时间信号时,只测总信号中的一部分,即长度为 T 的一段时间记录。这一过程相当于用一个矩形窗去乘实际信号(图 a.2.9c 及图 a.2.10c)。但选择更加合适的时窗可以大大降低泄漏误差。合适的时间窗能减小采样时段边界上的不连续性,迫使信号变成周期的,从而减少泄漏,所以具有上乘的表现。选择时间窗时总要兼顾既要有好的幅值估计,又要有好的频率分辨率。

图 a.2.11(参考文献 a.2.10 a.2.11 及 a.2.28)总结了一些常用时间窗及有关的表达式与其傅立叶变换。从图中可以看出,抑制旁瓣通常会使主瓣的宽度增加。

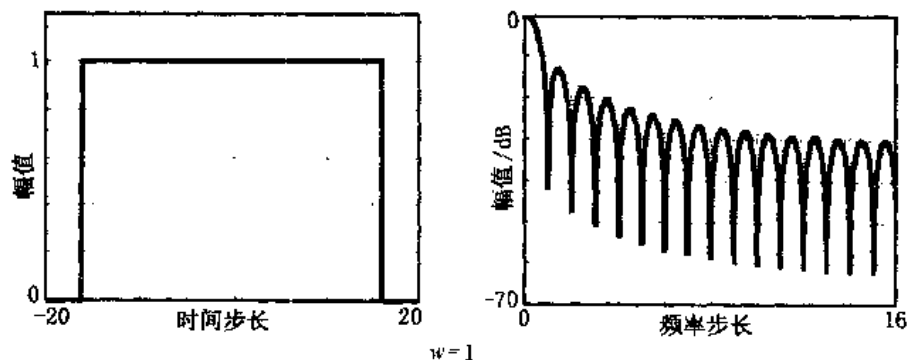


图 a.2.11a 矩形窗及其变换

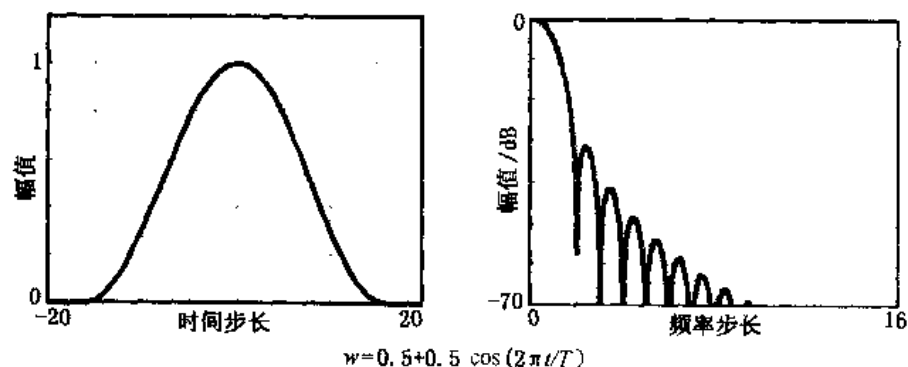


图 a.2.11b Hanning 窗及其变换

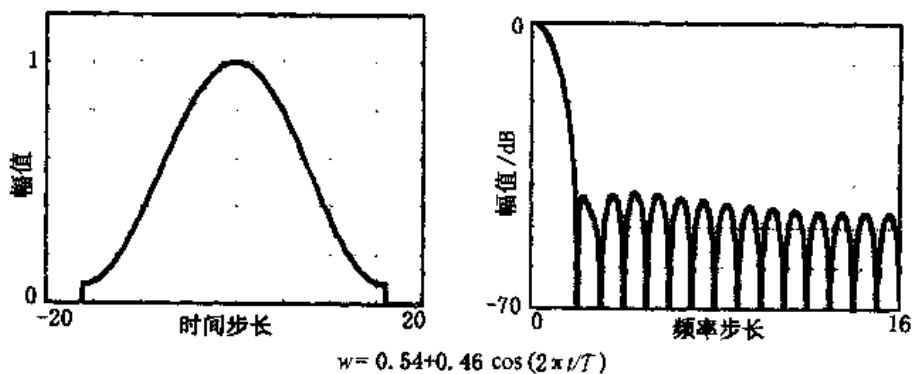


图 a.2.11c Hamming 窗及其变换

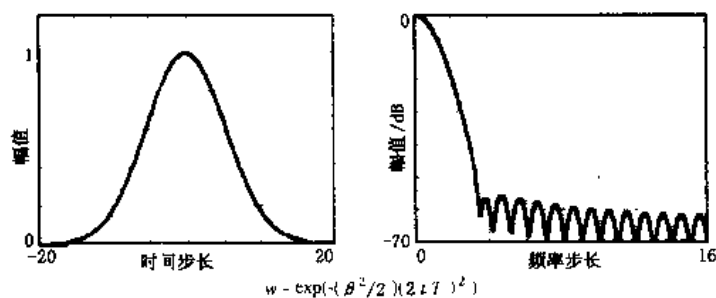


图 a.2.11d Gauss 窗($\beta=3.0$)及其变换

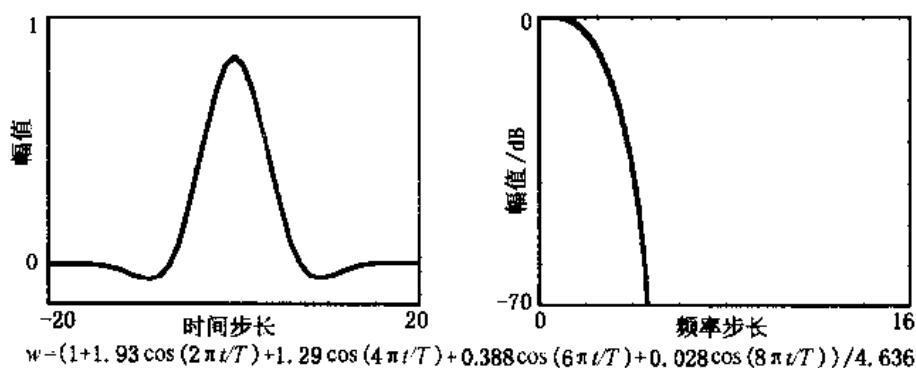


图 a.2.11e 平顶窗及其变换

表 a.2.2 列出了有关上述时间窗的品质的一些数字(参考文献 a.2.10)。时间窗的重要特性如下:

- 最高旁瓣幅度:这个幅度越小,泄漏则越少(见图 a.2.10)。
- 凹陷损失:这个特征是信号在窗谱中主瓣中心频率以外其他频率上衰减程度的量度:最大凹陷损失小,说明窗在这方面的特性好。
- 固有增益:防漏窗会使原信号在观测窗的末端减小,因而信号总能量就减小了,在频谱中则表现为幅值的减小。这是一种固有误差,每个窗都有。

表 a.2.2 窗的特性(参考文献 a.2.11 及 a.2.28)

窗 的 类 型	最高旁瓣量级/dB	凹陷损失/dB	固有增益
矩形窗	-13	3.29	1.00
Hanning 窗	-32	1.42	0.50
Hamming 窗	-43	1.78	0.54
Gauss 窗($\beta=3.0$)	-55	1.25	0.43
平顶窗	-94	0.01	0.22

关于这些窗及其他一些窗的更详尽的特性,有兴趣的读者请参考 Harris(参考文献 a.2.10)或 Elliot 和 Rao(参考文献 a.2.12)的著作。

图 a.2.12(参考文献 a.2.10 和 a.2.11)表示各种窗在频率分辨率方面的特性。每张图都是由两个正弦波组成的信号 $f(t)$ 的离散傅立叶变换,其中一个正弦波振幅为 1.0,频率为 10.5 Hz,另一个振幅为 0.01,频率为 16.0 Hz。频率为 10.5 Hz 的正弦波在所考虑的时段内是 11 周期的。有些窗几乎反映不出 16.0 Hz 的分量,只有很少几个窗能够比较清晰地区别这两个分量。

在图 a.2.12a,b,c,d,e 中, $f(t) = \cos(10.5(2\pi t)) + 0.01\cos(16(2\pi t))$

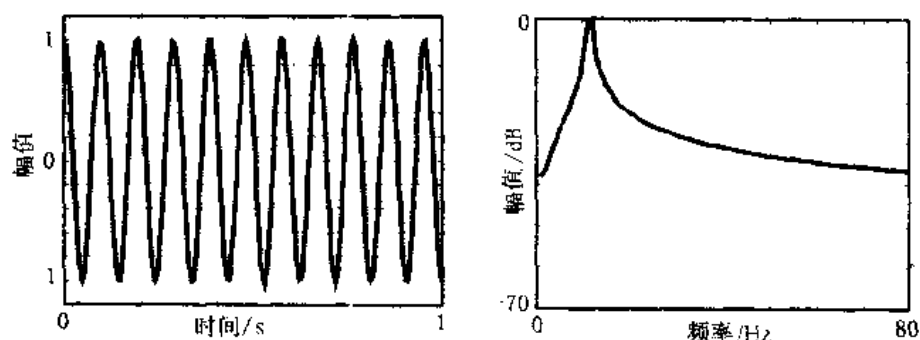


图 a.2.12a 矩形窗施于信号 $f(t)$

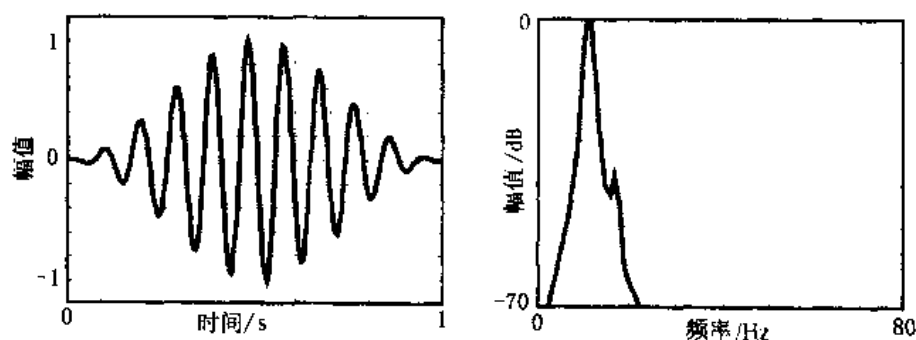


图 a.2.12b Hanning 窗施于信号 $f(t)$

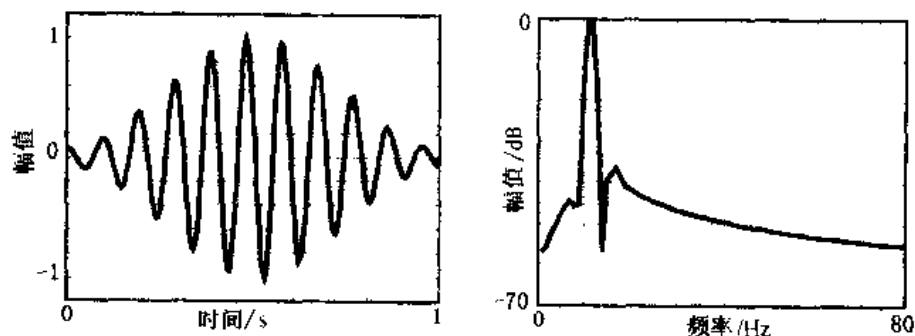


图 a.2.12c Hamming 窗施于信号 $f(t)$

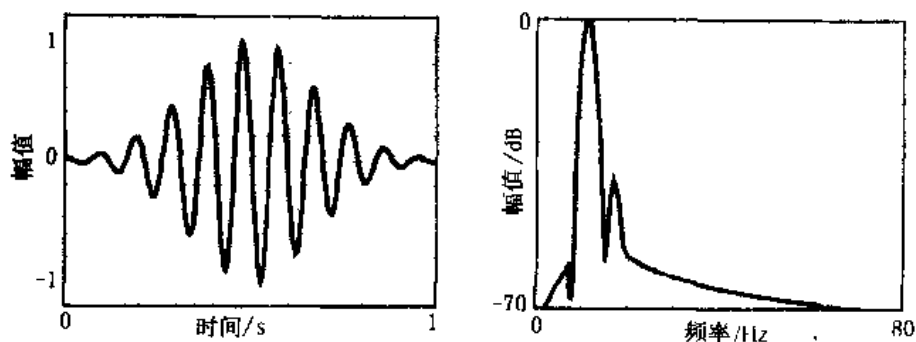


图 a.2.12d Gauss 窗($\beta = 3.0$)施于信号 $f(t)$

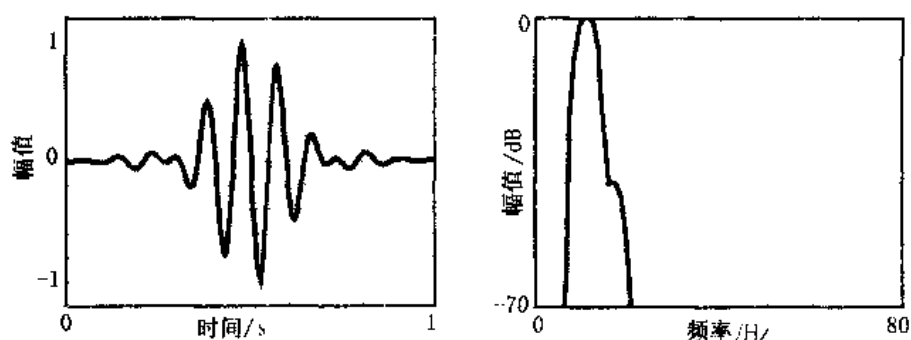


图 a.2.12e 平顶窗施于信号 $f(t)$

因为图 a.2.12 意在强调应用各种不同窗时的频谱分辨率,所以未表示出加窗后所带来的另外两个重要结果,即凹陷损失参数与固有增益参数所反映的那些情况。

首先,由于 10.5 Hz 的正弦信号在加窗时间段中不是周期的,所以它在频域中的幅值就决定于所加的这个窗(事实上决定于该窗频谱主瓣的宽度与形状,即凹陷损失)以及这个非周期信号相对于采样频率点的位置。相对于采样频率点的位置所带来的误差光靠乘个一般的系数是不能修正的。采用平顶窗可以大大减小这种误差,但由于主瓣较宽,因而频率分辨率较差。

其次,采用非矩形窗会使信号中的总能量减少,从而也降低了频域中的幅值(固有增益)。降低量完全取决于窗的形状,因此这个误差是可以补偿的。

我们还要提一下另外两种特殊而重要的窗,在锤激试验(见 B.3 章)中要用到它们。在锤激法试验中,输入的时间信号是个脉冲样的信号,响应则是若干衰减正弦信号的组合(图 a.2.13)。

我们对响应信号加一个指数窗 $w(t) = e^{-at}$ (图 a.2.14),理由可以是下述因素之一:在小阻尼结构和(或)时间窗相对较窄时,响应在此时间段末尾还未完全消失,从而引起不连续性和泄漏。将这样的响应乘一个指数窗,就会得到一个在此时间段末尾基本上衰减为零的信号。在大阻尼结构或比较长的时间段的情况下,信号消失得快,在剩下的一段时间中,噪声有可能使末尾结果恶化;加指数窗将有助于减小这种噪声的影响。

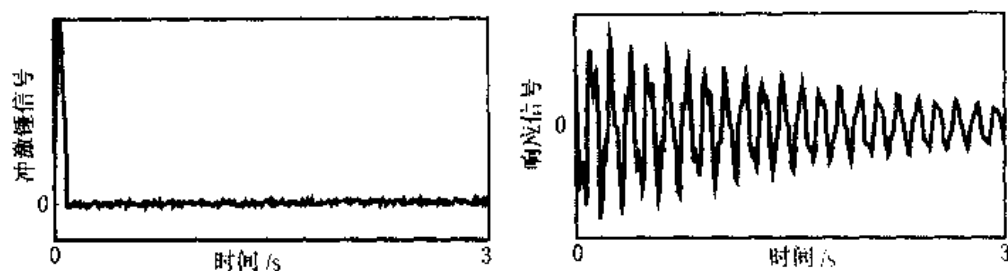


图 a.2.13 典型的锤激脉冲及锤激响应

同样,由于力的持续时间短,在其后的剩余时间,任何噪声都是不希望的;给力加这样一个窗——它在力脉冲持续时间内等于响应指数窗,而脉冲刚过它便平滑地降为零,并一直保持到时段的结束——是解决这种噪声问题的一种办法(图 a.2.14)。加上力窗和指数窗之后,就等于给系统增加了一定量的已知阻尼。

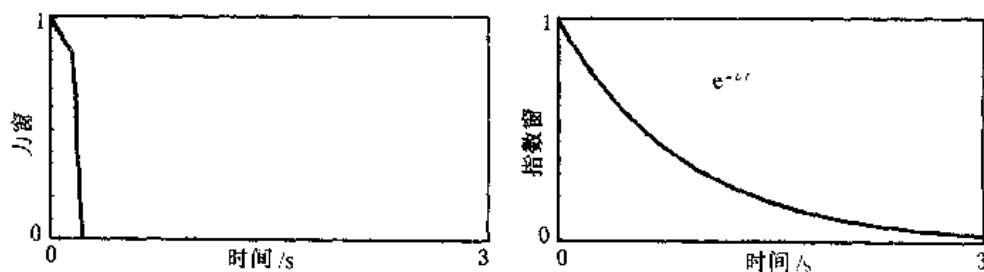


图 a.2.14 力窗和指数窗

A.2.5 其他变换

另外还有其他一些变换与傅立叶变换有着密切的关系。拉普拉斯变换是连续傅立叶变换的更一般的形式,而 Z 变换则是采样(离散)函数傅立叶变换的更一般的形式。

A.2.5.1 拉普拉斯变换

拉普拉斯变换对(或称复数傅立叶变换对)定义如下:

$$(a.2.16) \quad g(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} G(p) e^{pt} dp,$$

$$(a.2.17) \quad G(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{-pt} dt.$$

其中, $p = \sigma + j\omega$ (σ 为常数)。傅立叶变换可以认为是在复平面内沿 $j\omega$ 轴 ($\sigma = 0$) 的拉普拉斯变换。拉普拉斯变换与傅立叶变换有着类似的性质,如时移、频移、比例放大、时域中的微分、积分、卷积等等。然而与傅立叶变换不同的是,拉普拉斯变换能够计及系统的初始条件。

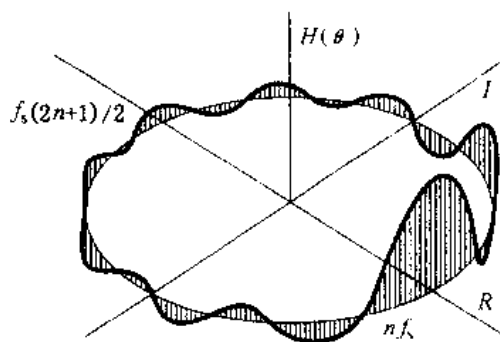
A.2.5.2 Z 变换

Z 变换定义为:

$$(a.2.18) \quad G(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g(n\Delta t) z^{-n},$$

反 Z 变换是:

$$(a.2.19) \quad g(n\Delta t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} G(z) z^{n-1} dz$$



其中, z 为复变量; Γ 表示在复平面中的一个闭合积分路径。以 $z = e^{j2\pi/\Delta t}$ (即半径为 1 的圆) 代入后, (a.2.18) 式就简化成已采样时间函数的傅立叶变换, 见 (a.2.9) 式。所以已采样时间函数的傅立叶变换可以理解为单位圆 ($|z| = 1$) 上的 z 变换。在此单位圆上 (见图 a.2.15 及参考文献 a.2.11), 采样频率 $f_s \left(= \frac{1}{\Delta t} \right)$ 使 $z = e^{j2\pi} = 1$, f_s 的任意整数倍也使 $z = 1$ 。这是 A.2.1.3 节和图 a.2.3 所讲到的采样时间信号的频谱的周期性的又一种表述方式。Z 变换经常用于数字滤波器的设计与评估。

A.2.6 时间函数、频率函数及其应用

为了分析振动和噪声现象, 我们要研究几种函数, 它们可以是时间信号也可以是频率信号。然而最常用到的是几个函数的某种组合, 因为只有这样的函数组合才能够给出噪声和/或振动的清晰估计。本章要讨论以下几种典型函数: 在频域中有自功率谱、互功率谱、相干和频响函数; 在时域中有自相关函数、互相关函数和脉冲响应函数。下面几节将给出这些函数的定义并说明它们在模态分析中的应用。附录 AA.2.1 讨论这些函数以及倒频谱函数在振动与噪声分析方面的另一些应用。

A.2.6.1 自功率谱与自相关函数

时间信号 $a(t)$ 的自功率谱定义为:

$$(a.2.20) \quad G_{AA}(f) = A(f) A^*(f),$$

式中 $A(f)$: $a(t)$ 的傅立叶变换;

*: 共轭符号。

自功率谱表示信号中的平均功率是如何按频率分布的。

瞬态时间信号 $a(t)$ 的自相关函数是:

$$(a.2.21) \quad R_{aa}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} a(t) a(t + \tau) dt$$

而对于稳态信号 $a(t)$, 其自相关函数定义为:

$$(a.2.22) \quad R_{aa}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} a(t) a(t + \tau) dt$$

可以证明(见参考文献 a.2.9),自功率谱 G_{AA} 与自相关函数 R_{aa} 构成一个傅立叶变换对(此即 Wiener-Kinchin 定理)。

在实验模态分析中,自功率谱用于计算平均频响函数(见 A.2.6.4 节)以及用以评判力输入信号的质量(见 B.2.3.1 节)。

自功率谱的另一个重要应用是分析旋转机械的特性。自功率谱和自相关函数可以帮助我们检测信号中的回声(参考文献 a.2.9)。典型的应用实例是锤激试验(B.3.1.3.7 节)中的双击,或麦克风捕捉到的声反射信号。附录 AA.2.1.1 简述了这些应用。

A.2.6.2 互功率谱与互相关函数

两个时间信号 $a(t)$ 和 $b(t)$ 之间的互功率谱是:

$$(a.2.23) \quad G_{AB}(f) = A(f) B^*(f)$$

式中 $A(f), B(f)$: 分别为 $a(t)$ 和 $b(t)$ 的傅立叶变换,
* : 共轭符号。

互功率谱的幅值大小是两个信号中各个频率上联合功率的量度,而相位则是联合功率在各频率上的相对出现时间。

瞬态时间信号 $a(t)$ 和 $b(t)$ 的互相关函数是:

$$(a.2.24) \quad R_{ab}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} a(t) b(t + \tau) dt .$$

对于稳态信号,互相关函数是:

$$(a.2.25) \quad R_{ab}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} a(t) b(t + \tau) dt .$$

同自功率谱与自相关函数构成一个傅立叶变换对一样,互功率谱与互相关函数也构成一个傅立叶变换对(参考文献 a.2.9)。

互功率谱最普通的用途是计算两个信号之间的平均频响函数(FRF)(见 A.2.6.4 节)。

“自”与“互”之间的关键区别在于,互功率谱与互相关函数包含着因果信息,因而在检测并确定信号延迟方面是非常有用的工具。互谱的另一个重要应用方面是估计声强(附录 AA.2.1)

A.2.6.3 平均

平均技术是用以降低信号中混入的随机噪声分量含量的一种方法。信号既可以在时域中平均,也可以在频域中平均(图 a.2.16,参考文献 a.2.16)。

平均过程可以是同步的,也可以是异步的。在同步平均情况中,每一次平均的数据采集都是在某一特定信号的触发下开始的。典型例子如锤激试验那样,每次平均的数据采集过程都是由锤击脉冲触发的。对这些数据块进行时间平均会使与锤击信号无关的各种噪声减小。另一种同步平均叫做循环平均:在这种情况下触发与数据采样有关。例如,如果使平均与 20 Hz

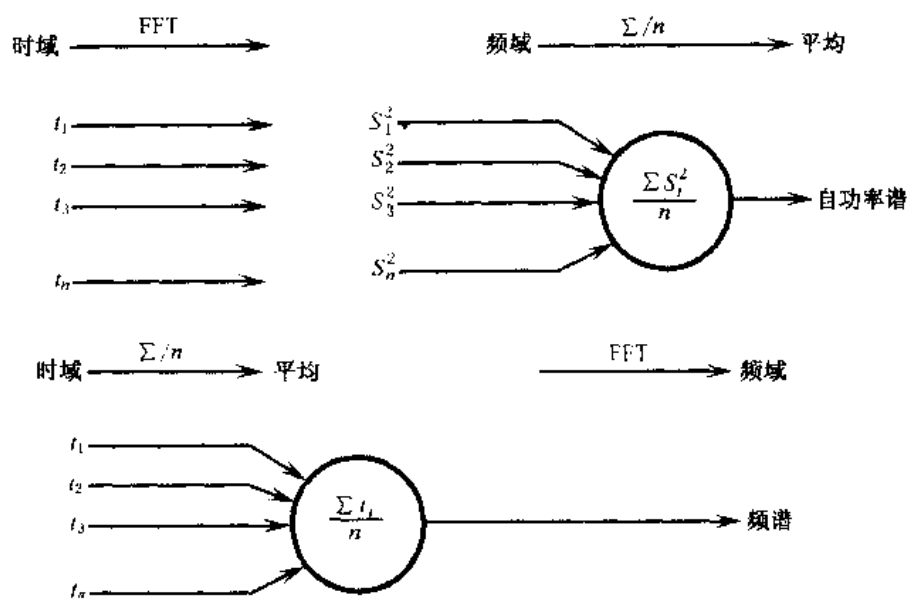


图 a.2.16 频域平均与时域平均

的分量相同步,那末所有不同于 20 Hz 及其整数倍的分量都将被平均掉,因为这些分量在两次平均之间的相位会改变(图 a.2.17a,参考文献 a.2.16)。这种平均方式也可以叫做频域“梳状”滤波器,梳齿出现在所有同步频率分量上,使两个齿之间的谱衰减就意味着降低噪声。这种平均的典型应用是旋转机械试验,在那里往往强调基频(转速)及其谐波。在对时间数据进行非同步(“随机”或“自由运行”)平均时,所有分量都将被平均掉,如图 a.2.17b。

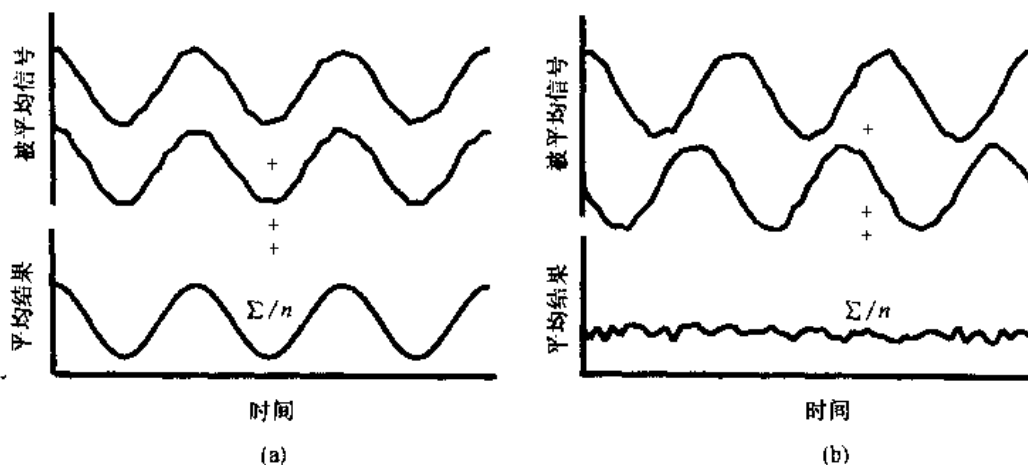


图 a.2.17

(a) 同步时域平均; (b) 异步时域平均

对自谱、互谱(频域)进行平均时应当明白这样一个事实,即只有当输入是稳态的并且平均次数足够多时,这些谱才具有统计意义上的惟一性(参考文献 a.2.18)。关于频响函数与对应的相干函数的平均问题将在下节(A.2.6.4 节)讨论。

A.2.6.4 频响函数与相干函数

(1) 单输入单输出

设输入信号 $f(t)$ 和输出信号 $x(t)$ 的频谱分别为 $F(f)$ 与 $X(f)$, 则这两个信号之间的频响函数(FRF) $H(f)$ 定义为(见 A.2.3.6 节):

$$(a.2.26) \quad X(f) = H(f) F(f)$$

因而可直接写出频响函数为

$$(a.2.27) \quad H(f) = \frac{X(f)}{F(f)}$$

如果通过对这些量加以平均而直接估计频响函数 $H(f)$:

$$\hat{H}(f) = \frac{1}{N_a} \sum_{n=1}^{N_a} \left(\frac{X(f)}{F(f)} \right)_n,$$

那么这种计算潜藏着一个危险,即 $F(f)$ 有可能等于零。因此在实践上我们发现,采用自功率谱和互功率谱来计算 $H(f)$ 更具优越性:

$$(a.2.28) \quad H_1(f) = \frac{X(f) F^*(f)}{F(f) F^*(f)} = \frac{G_{XF}}{G_{FF}}, \text{ 或}$$

$$(a.2.29) \quad H_2(f) = \frac{X(f) X^*(f)}{F(f) X^*(f)} = \frac{G_{XX}}{G_{FX}}.$$

用(a.2.28)式或(a.2.29)式计算频响函数的主要理由是,平均之后与输入或输出信号不相关的噪声都能减小。根据频响函数的惟一性,对频响函数进行平均的过程可以大大简化。这个惟一性的概念是,当使用互谱和自谱来计算频响函数时,只要系统是线性的,那末频响函数的估计就本该是惟一的。不论输入是稳态的、非稳态的,还是确定性的,这种估计都是正确的。

实践上,我们是用自功率谱和互功率谱的平均值(以符号 $\hat{}$ 表示):

$$\begin{aligned} \hat{G}_{FF} &= \frac{1}{N_a} \sum_{n=1}^{N_a} (G_{FF})_n, \quad \hat{G}_{XX} = \frac{1}{N_a} \sum_{n=1}^{N_a} (G_{XX})_n, \\ \hat{G}_{FX} &= \frac{1}{N_a} \sum_{n=1}^{N_a} (G_{FX})_n, \quad \hat{G}_{XF} = \frac{1}{N_a} \sum_{n=1}^{N_a} (G_{XF})_n, \end{aligned}$$

其中, N_a 为平均次数。求得 $H(f)$ 的最小二乘近似值,从而估计出频响函数。在不同步信号情况下,必须通过对自功率谱与互功率谱进行平均来计算 $H(f)$, 因为没有其他办法保存相位信息使估计得以改善(参考文献 a.2.18)。只有在同步信号平均情况下才可直接利用(a.2.27)式来估计频响函数,但事实上很少这样做。下面在讨论多输入多输出的频响函数估计时将阐明 H_1 估计法与 H_2 估计法的噪声衰减特征。

由于估计频响函数时用的是最小二乘近似方法,因而可以定义相应的相关系数,称这个系数为相干函数,它是最小二乘误差的量度。对于单入单出情形,相干函数(平方形式)定义为:

$$(a.2.30) \quad \gamma^2 = |\hat{G}_{FX}|^2 / (\hat{G}_{FF} \cdot \hat{G}_{XX})$$

相干函数可理解为频域的相关系数,它在 0 和 1 之间变化;相干函数等于 1,表明两个相比较的信号(例如输入与输出)之间经全部平均后存在着良好的线性关系;若相干函数小于 1,则可能是由于下面某种或几种原因所引起的(参考文献 a.2.9):

- 在 $f(t)$ 和/或 $x(t)$ 的测量中存在不相关的噪声;
- 被研究系统有非线性;
- 分析过程中有泄漏;
- 系统中的延迟现象未在分析中得到补偿。

在估计频响函数和相干函数时,统计误差是相干函数 γ^2 和平均次数 N_a 的函数:

$$(a.2.31) \quad \epsilon_r(\gamma^2) = \frac{\sqrt{2(1-\gamma^2)}}{\sqrt{N_a}\gamma^2},$$

$$(a.2.32) \quad \epsilon_r(H) = \sqrt{\frac{1-\gamma^2}{2N_a\gamma^2}}$$

这里 $\epsilon_r(x) = \sigma/x$ 是归一化的随机误差。图 a.2.18(参考文献 a.2.19)表示对于不同的相干函数值 γ^2 , 频响函数估计误差随平均次数变化的情况。

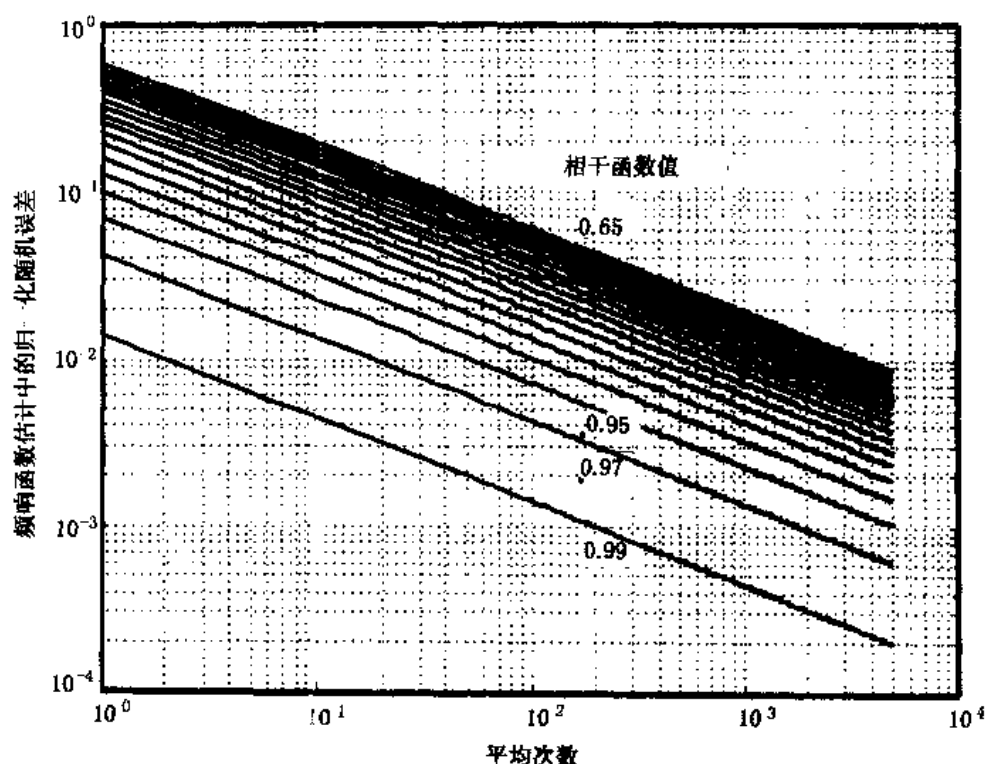


图 a.2.18 频响函数的误差随相干函数和平均次数而变化

相干函数的主要用途是检验两个信号之间最终的线性关系,所以它反映了测量质量的好坏(噪声大小、泄漏程度……)或所给模型的正确性(即信号之间的线性依赖性)。相干函数更详尽、更实际的解释在 B.2.3.2 节讨论。

相干函数有时也用以生成许多导出函数,如相干输出功率(COP)及信噪比(S/N)等。相干输出功率

$$(a.2.33) \quad \text{COP} = \gamma^2 G_{XX}$$

表示测得的自功率谱 G_{XX} 中有多大一部分与自谱为 G_{FF} 的特定输入信号完全相干。信噪比

$$(a.2.34) \quad S/N = \frac{\gamma^2}{1 - \gamma^2}$$

则是相干输出功率与不相干输出功率之间的比值。在此定义中,所有不相干信号皆视为噪声。

(2) 多输入多输出

对于多人多出情况,(a.2.26)式变成一个矩阵方程:

$$(a.2.35) \quad \{X(f)\}_{N_o \times 1} = [H(f)]_{N_o \times N_i} \{F(f)\}_{N_i \times 1}$$

H_1 估计法假定输入信号中不存在噪声,而在响应信号中有一定量的不相关噪声 $\{\eta_o\}$,于是有:

$$(a.2.36) \quad \{X(f)\}_{N_o \times 1} - \{\eta_o\}_{N_o \times 1} = [H(f)]_{N_o \times N_i} \{F(f)\}_{N_i \times 1},$$

以 $\{F(f)\}^{*T}$ 右乘上式得:

$$(a.2.37) \quad \{X(f)\} \{F(f)\}^{*T} - \{\eta_o\} \{F(f)\}^{*T} = [H(f)] \{F(f)\} \{F(f)\}^{*T}.$$

因为 H_1 估计法假定噪声与输入力不相关,所以如果平均次数足够多的话,上式左边第二项将趋于零。这样经多次平均之后的频响函数可由下式计算:

$$(a.2.38) \quad [H_1]_{N_o \times N_i} = [\hat{G}_{XF}]_{N_o \times N_i} [\hat{G}_{FF}]_{N_i \times N_i}^{-1},$$

式中记号“1”表示平均过程是“ H_1 ”估计法。上式与(a.2.28)式相类似,它表明只有当矩阵 $[\hat{G}_{FF}]$ 是非奇异矩阵即各输入力之间互不相关时才能这样计算频响函数。

H_2 估计法假定输出信号中没有噪声,输入信号中有不相关噪声 $\{\eta_i\}$ 。由这些假定可以写出:

$$(a.2.39) \quad \{X(f)\}_{N_o \times 1} = [H(f)]_{N_o \times N_i} (\{F(f)\}_{N_i \times 1} + \{\eta_i\}_{N_i \times 1}),$$

以 $\{X(f)\}^{*T}$ 右乘上式两边得:

$$(a.2.40) \quad \{X(f)\} \{X(f)\}^{*T} = [H(f)] (\{F(f)\} + \{\eta_i\}) \{X(f)\}^{*T}.$$

由于假定了噪声与输出不相关,而且平均次数又足够多,所以右边第二项趋于零,于是得到:

$$(a.2.41) \quad [H(f)]_{N_o \times N_i} [\hat{G}_{FX}]_{N_i \times N_o} = [\hat{G}_{XX}]_{N_o \times N_o}.$$

只有当 $N_o = N_i$ 时上式才能得出频响函数矩阵的惟一估计;如果 $N_o > N_i$,则解上面的方程必须用 $[\hat{G}_{FX}]$ 的广义逆矩阵。这一约束在实际上限制了 H_2 估计法在单输入情况中的应用;在单输入情况中,每一个响应都被认为是独立的。

假定输入输出信号中分别有测量误差 $\{\eta_i\}$ 和 $\{\eta_o\}$,这时采用 H_1 估计法可同时减小这两种误差的影响。这种总体最小二乘估计法由下式开始:

$$(a.2.42) \quad \{X(f)\}_{N_o \times 1} + \{\eta_o\}_{N_o \times 1} = [H(f)]_{N_o \times N_i} (\{F(f)\}_{N_i \times 1} + \{\eta_i\}_{N_i \times 1})$$

对于某响应点 o ,上式变成(为方便计省略 f):

$$(a.2.43) \quad X_o + \eta_o = \langle H \rangle_o (\{F\} + \{\eta_i\}).$$

重写如下:

$$(a.2.44) \quad \begin{aligned} \langle \langle H \rangle_o - 1 \rangle \left\{ \begin{array}{c} \{F\} + \{\eta_i\} \\ X_o + \eta_o \end{array} \right\} &= 0 \quad \text{或} \\ \left\{ \begin{array}{c} \{F\}^T + \{\eta_i\}^T \\ X_o^T + \eta_o^T \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \langle H \rangle_o^T \\ -1 \end{array} \right\} &= 0. \end{aligned}$$

以 $\begin{Bmatrix} \{F\}^* + \{\eta_i\}^* \\ X_o^* + \eta_o^* \end{Bmatrix}$ 左乘上式两边得:

$$(a.2.45) \quad \begin{bmatrix} (\{F\}^* + \{\eta_i\}^*)(\{F\}^T + \{\eta_i\}^T) & (\{F\}^* + \{\eta_i\}^*)(X_o^T + \eta_o^T) \\ (X_o^* + \eta_o^*)(\{F\}^T + \{\eta_i\}^T) & (X_o^* + \eta_o^*)(X_o^T + \eta_o^T) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \langle H \rangle_o^T \\ -1 \end{Bmatrix} = 0.$$

如果矩阵中的元素是经若干次平均后估计出来的,则上式变成:

$$(a.2.46) \quad \begin{bmatrix} [\hat{G}_{FF}]_{N_i \times N_i} & [\hat{G}_{XF}]_{N_i \times 1}^T \\ [\hat{G}_{FX}]_{1 \times N_i}^T & \hat{G}_{XX} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \langle H \rangle_o^T \\ -1 \end{Bmatrix} = 0, \text{ 或 } [\hat{G}_{FXFX}] \begin{Bmatrix} \langle H \rangle_o^T \\ -1 \end{Bmatrix} = 0$$

将上式与特征值问题加以比较:

$$(a.2.47) \quad [\hat{G}_{FXFX}] \{V_g\} = \epsilon_g \{V_g\}$$

因为输出 X 决定于输入 F_i , 故 $[\hat{G}_{FXFX}]$ 是奇异的。因而如果没有噪声存在, 则最小特征值 ϵ_{gl}

将是零。对应的特征向量 $\langle V_g \rangle_l$ 与 $\begin{Bmatrix} \langle H \rangle_o^T \\ -1 \end{Bmatrix}$ 只差一比例因子, 于是有:

$$(a.2.48) \quad \begin{Bmatrix} H_{o1} \\ H_{o2} \\ \vdots \\ H_{oN_i} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -V_{g1l}/V_{g(N_i+1)l} \\ -V_{g2l}/V_{g(N_i+1)l} \\ \vdots \\ -V_{gN_il}/V_{g(N_i+1)l} \end{Bmatrix}.$$

只有当 $V_{g(N_i+1)l} \neq 0$ 时才能估计这些频响函数。参考文献 a.2.20 解释说, 如果矩阵 $[\hat{G}_{FF}]$ 是非奇异矩阵, 则此条件满足, 这意味着各输入力是互不相关的。如果存在的噪声不相关并且平均次数足够多, 则 ϵ_{gl} 将很小(但不会等于零), 此时相应的特征向量便是频响函数的最佳最小二乘估计。就减小输入输出中的噪声而言, 如果将输入输出量根据它们各自所含噪声的量级反比例地加以放缩, 那么 H_o 估计法的有效性将会提高。如果这些噪声量是未知的, 那么输入输出量应予以比例缩放使之相等(例如在整个频带内平均)。

检验矩阵 $[\hat{G}_{FF}]$ 的非奇异性的最有效的方法是以主功率谱为根据的。主功率谱就是 $[\hat{G}_{FF}]$ 作为频率函数的 N_i 个特征值。在频带内的任何地方任何特征值都不会是零(或者明显地小于其他值)。此外, 相干函数亦可以指明矩阵 $[\hat{G}_{FF}]$ 的非奇异性。B.2.3.1 节给出了这样检查奇异性的一个例子。

两个信号之间的普通相干函数如(a.2.30)式所定义:

$$(a.2.30) \quad \gamma^2 = |\hat{G}_{FX}|^2 / (\hat{G}_{FF} \hat{G}_{XX}).$$

对于多输入情况, 因为输出信号中包含有其他输入信号的作用, 故此谈论某个输出信号与某个输入信号之间的普通相干函数是没有什么意义的。这样的普通相干函数的值是很小的。然而输入力之间的相干函数却能够给出矩阵 $[\hat{G}_{FF}]$ 的非奇异性信息: 两个输入之间的普通相干函数数值高, 将会使 $[\hat{G}_{FF}]$ 变成奇异的。参考文献 a.2.18 定义了一个响应点 o 的多重相干函数, $m\gamma_o^2$:

$$(a.2.49) \quad m\gamma_o^2 = \sum_{s=1}^{N_i} \sum_{t=1}^{N_i} \frac{H_{os} \hat{G}_{FFst} H_{ot}}{\hat{G}_{X_o X_o}}$$

这个量是根据所有输入力来预测响应信号质量好坏的度量。

关于 H_1 、 H_2 和 H_v 估计法的重要结论,小结如下(见参考文献 a.2.19):

- 当 H_v 可用时,它优于 H_1 、 H_2 。
- 如果 H_v 不能用,当输出端有附加噪声或有几个互相独立的输入时, H_1 可给出最好估计。
- 如果 H_v 不能用,当输入端有附加噪声时,应当采用 H_2 估计。
- 如果 H_v 不能用,当共振峰上有泄漏问题(分辨率偏移),那末 H_2 比 H_1 给出的估计更好。

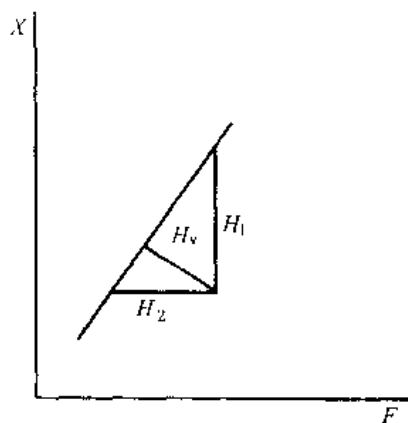


图 a.2.19a 在共振点上的 H_1 、 H_2 和 H_v 估计

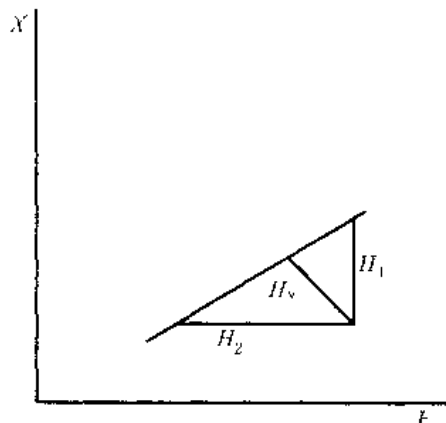


图 a.2.19b 在反共振点上的 H_1 、 H_2 和 H_v 估计

图 a.2.19(参考文献 a.2.18)表示在共振点(图 a)和反共振点(图 b)附近用 H_1 、 H_2 和 H_v 估计的情形。在这两种情况下, H_v 给出的结果最好。如果 H_v 不可用,在共振点附近用 H_2 、在反共振点处用 H_1 都能给出较好的结果。

A.2.7 结 论

本章讨论模拟信号与数字信号处理的一些基础知识,其中主要介绍了傅立叶级数与傅立叶变换及其主要性质。在此基础上讨论了典型的数字信号处理误差如迭混与泄漏问题,接着讨论用窗函数来调整信号。

A.2.6 节讨论了几个信号分析函数及其在实验模态分析中的应用。这一部分特别强调自功率谱与互功率谱在模态分析中计算频响函数和相干函数时的应用。附录 AA.2.1 则说明了这些信号分析函数在振动分析方面更多的应用。

A.3 章 模态参数估计

A.3.0 引言

模态参数估计是实验模态分析的第三个重要步骤。第一个步骤是建立测量系统,即悬挂试件,安装激振器,选择力传感器和响应传感器,对系统进行校准等等(见 B.1 和 B.2 章)。第二个步骤是测量频率响应数据。在某一激振力的作用下结构一旦振动起来(见 B.3 章),即可测出力和响应的时域数据并把它们转换到频域,算出频响函数的平均估计(见 A.2 章)。在某些情况下不要求计算频响函数,而要求时间历程。第三个步骤就是模态参数估计,即利用测得的频响函数或时间历程来估计模态参数,诸如系统极点(即阻尼固有频率和阻尼因子)、振型以及模态参预因子等等(见 A.1 章)。

为了从测量得到的动态数据中估计出模态参数,过去的十年间研究出了许多方法。但是本章的目的不是详细讨论这些方法,而是首先从结构动态特性模态模型出发,讨论模态参数估计方法(见 A.3.2 节)的一些最重要的基本概念。即使对具体方法的原理不感兴趣的读者,也应当研究一下这一节,它包括了各种不同方法的分类。遵循历史的沿革,本章讨论一些单自由度估计方法(A.3.3 节)。现代多自由度估计法分为时域法(A.3.4 节)和频域法(A.3.5 节)。所有这几节讨论都只讲估计方法的基本内容。

本章大部分内容取自参考文献 a.3.1 和 a.3.2,它们的作者分别是 F. Lembregts 和 J. Leuridan, H. Van der Auweraer, M. Mergeay。有兴趣的读者可以从这些论文中找到更详尽的参考书目。

A.3.1 模态模型的基本方程

因为模态参数估计的目的是从测得的频响函数数据或时间历程来估计振动特性(即模态参数),所以在这里我们把基本的模态模型方程重述一下是合适的。

A.1 章(A.1.2.5 节)导出了频响函数矩阵 $[H]$ 的表达式,该矩阵在频域将输出位移和输入力联系了起来($\{X(j\omega)\} = [H(j\omega)]\{F(j\omega)\}$),借助模态参数可以表示为:

$$(a.3.1) \quad [H(j\omega)] = \sum_{r=1}^N \left(\frac{Q_r \{\Psi\}_r \{\Psi\}_r^T}{(j\omega - \lambda_r)} + \frac{Q_r^* \{\Psi\}_r^* \{\Psi\}_r^{*T}}{(j\omega - \lambda_r^*)} \right), \text{ 或}$$
$$[H(j\omega)] = [V] \left[j\omega \begin{bmatrix} I_N \\ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Delta_N \\ \end{bmatrix} \right]^{-1} [L].$$

但在实践上,各矩阵的维数受到限制,频响函数矩阵表示为:

$$[H(j\omega)]_{N_o \times N_i} = [V]_{N_o \times 2N_m} \left[j\omega \begin{bmatrix} I_N \\ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Delta_N \\ \end{bmatrix} \right]_{2N_m \times 2N_m}^{-1} [L]_{2N_m \times N_i},$$

或者,当需要近似考虑我们所关心的频带范围之外的那些模态的影响时,频响函数则可以如下表示:

$$[H(j\omega)]_{N_o \times N_i} = [V]_{N_o \times 2N_m} \left[j\omega \begin{bmatrix} I_N \\ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Delta_N \\ \end{bmatrix} \right]_{2N_m \times 2N_m}^{-1} [L]_{2N_m \times N_i} +$$

$$[UR]_{N_o \times N_i} = \frac{[LR]_{N_o \times N_i}}{\omega^2}$$

式中 Q_r : 模态比例换算因子;
 $[\Psi]_r$: 第 r 阶模态向量;
 $\lambda_r: \sigma_r + j\omega_r$, 系统极点;
 σ_r : 阻尼因子;
 ω_r : 阻尼固有频率;
 $[V] := [\Psi_1 \cdots \Psi_N \Psi_1^* \cdots \Psi_N^*]$, 模态向量矩阵;
 $[\Lambda_N]$: 由系统极点构成的对角矩阵;
 $[L] := [\Lambda_N^{-1} Q_N] [V]^T$: 模态参预因子矩阵;
 $[UR]$: 上剩余项矩阵;
 $[LR]$: 下剩余项矩阵;
 N_o : 输出点数;
 N_i : 输入点数;
 N_m : 可观测模态数。

下面我们来说明使用 $[UR]$ 和 $[LR]$ 的合理性。(a.3.1) 式表明, 在比某阶模态频率低得多的频率上 ($j\omega \ll j\omega_r$), 该阶模态对频响函数的影响近似于一个实常数值。因此, (远) 高于我们所关心的频率范围的那些模态对频响函数的影响可以用一个常数项 $[UR]$ 来近似。对于比例阻尼的情形, A.1.2.6 节已经证明, 在大大高于某一阶模态 (比如说第 r 阶模态) 频率的范围 ($j\omega \gg j\omega_r$), 该阶模态对频响函数的影响近似等于一个实常数除以 $-\omega^2$ 。因此, (远) 低于我们所关心的频率范围的那些模态的影响可近似为 $-[LR]/\omega^2$ 这样一项。

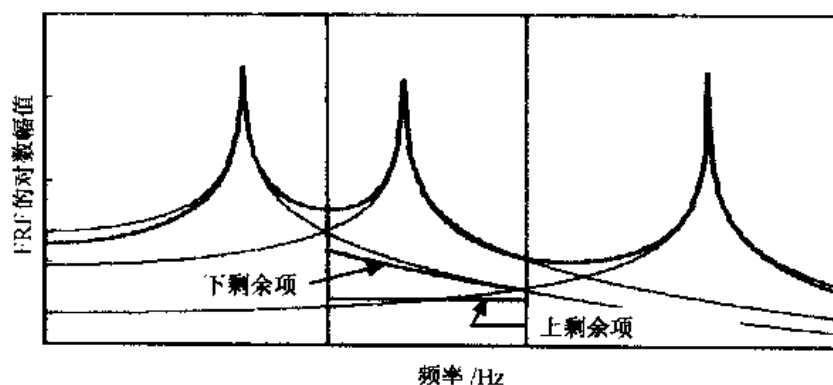


图 a.3.1 上下剩余项

在时域中, 上面那些公式相应地变为 (见 A.1.2.5 节):

$$(a.3.2) \quad [h(t)] = \sum_{r=1}^N (Q_r [\Psi]_r [\Psi]_r^T e^{\lambda_r t} + Q_r^* [\Psi]_r^* [\Psi]_r^{*T} e^{\lambda_r^* t}), \text{ 或}$$

$$[h(t)] = [V] [\Lambda_N^{-1} e^{\Lambda_N t}] [L],$$

$$[h(t)]_{N_o \times N_i} = [V]_{N_o \times 2N_m} \begin{bmatrix} e^{\lambda_r t} \\ 1 \end{bmatrix}_{2N_m \times 2N_m} [L]_{2N_m \times N_i}$$

式中 $[h(t)]$ 是脉冲响应函数矩阵。

在时域中不能采用剩余项。

A.3.2 基本概念

A.3.2.1 单自由度法与多自由度法

一般说来,一个系统的动态响应是它的若干阶模态振型的叠加。但是如果假定在给定的频带内只有一个模态是重要的,那么该模态的参数可以单独确定。以这一假定为根据的模态参数识别方法叫做单自由度(SDOF)法。在给定的频带范围内,结构的动态特性的时域表示近似为:

$$(a.3.3) \quad [h(t)] = [\Psi] e^{\lambda_r t} Q_r [\Psi]^T,$$

而频域表示则近似为:

$$(a.3.4) \quad [H(j\omega)] = \frac{Q_r [\Psi] [\Psi]^T}{(j\omega - \lambda_r)} + [UR] - \frac{[LR]}{\omega^2}.$$

式中的两个剩余项是计及频带附近的模态的影响而加的。单自由度法是一种很快速的方法,几乎不需要什么计算时间和计算机内存。

这种单自由度假定条件只有当系统的各阶模态能够很好解耦时才是正确的。然而实际情况通常并不是这样的,所以就需要用包含若干个模态的模型对测得的数据进行近似,同时识别这些模态的参数,这就是所谓的多自由度(MDOF)方法。

A.3.2.2 局部参数识别与整体参数识别

单个脉冲响应函数(j 点输入, i 点输出)的形式如下:

$$(a.3.5) \quad h_{ij}(t) = \sum_{r=1}^N (Q_r \Psi_{ir} \Psi_{jr} e^{\lambda_r t} + Q_r^* \Psi_{ir}^* \Psi_{jr}^* e^{\lambda_r^* t}), \text{ 或}$$

$$h_{ij}(t) = \sum_{r=1}^N (\Psi_{ir} e^{\lambda_r t} L_{rj} + \Psi_{ir}^* e^{\lambda_r^* t} L_{rj}^*).$$

仔细观察一下上述公式(或频域中的类似公式),我们可以得出如下结论:

- 极点 λ_r 跟输出点 i 与输入点 j 的位置无关,因此可以由每一个脉冲响应函数来确定。
- 模态振型系数 Ψ_{ir} 跟输入点的 j 位置无关。
- 模态参预因子 L_{rj} 跟输出点 i 的位置无关。

利用上面这些依存性进行参数识别,就形成模态参数的**整体估计**,被称做整体参数估计法。如果局部地进行参数估计,就是说一次使用一个脉冲响应函数,那么对于同一个参数,各次得到的估计可能均不相同,因而结果就是一组**局部估计**。

局部估计的缺点是,对于某个参数,其最终的估计结果必须从一组不同的结果中加以选择,例如计算它们的平均值。这个过程需要操作者的判断和干预,但它可以提供一统计方差,从而给出关于估计精度的某些信息。另一方面,整体估计可能遭受到一些典型的测量误差

如移动加速度计造成的附加质量影响的侵害。就整体估计法而言,可用数据组(如多个输入)的一致性是非常重要的。

A.3.2.3 单输入与多输入

从多输入数据中同时估计模态参数有很多好处。对于相隔很近的极点或双极点,只有对多输入数据进行多输入模态参数估计才能把它们分开。因为模态振型系数跟激励位置无关,所以多输入模态参数估计法可以对这些参数给出整体估计。

下面将证明,要分开相隔很近的极点或双极点必须采用多输入分析。假定有两个靠得很近的极点 λ_k 和 λ_l ,集中考虑脉冲响应矩阵 $[h(t)]$ 的第 1 列(与输入点 1 相对应)的表达式中的各对应项,我们有:

$$(a.3.6) \quad \begin{aligned} \{h(t)\}_1 &= \cdots \{\Psi\}_k e^{\lambda_k t} L_{k1} + \{\Psi\}_l e^{\lambda_l t} L_{l1} \cdots \quad \text{或} \\ \{h(t)\}_1 &\approx \cdots (\{\Psi\}_k L_{k1} + \{\Psi\}_l L_{l1}) e^{\lambda_k t} \cdots \end{aligned}$$

后一个式子指出,在来自输入点 1 的响应数据中,存在两个耦合模态的组合,其组合系数就是这两个耦合模态的模态参预因子。对应于输入点 2 的脉冲响应也有类似的结果:

$$(a.3.7) \quad \{h(t)\}_2 \approx \cdots (\{\Psi\}_k L_{k2} + \{\Psi\}_l L_{l2}) e^{\lambda_k t} \cdots,$$

这里与上式惟一不同的就是模态参预因子。多输入参数估计法所以能够识别耦合如此紧密的极点甚至双极点,正是缘于这样的事实:它同时考虑多个方程并同时估计多个模态参预因子。

A.3.2.4 模态模型与直接模型

当前流行的模态参数估计方法可以根据它们所估计的模型类别加以分类。

模态模型识别法把输出信号描述为机械结构运动微分方程的特征解(称为系统模态)的线性组合,于是识别问题简化为估计已知模型中的某些未知参数,即模态参数。式(a.3.1)和(a.3.2)分别为模态模型在频域和时域中的描述。

直接识别法用的是微分方程本身而不是关于特征解特性的某些先验知识。直接识别法估计模态参数采用两个步骤:第一步估计输入-输出微分方程的参数(系数),第二步才是从这些参数来估计模态参数,例如通过对估计出来的质量、刚度和阻尼等矩阵进行特征值分析来估计模态参数。这些直接模型可以从 A.1.2.1 节讨论过的基本方程导出。在时域中我们有:

$$(a.3.8) \quad [M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{f\},$$

其中 $[M]$:质量矩阵;

$[C]$:阻尼矩阵;

$[K]$:刚度矩阵;

$\{f(t)\}$:输入力向量;

$\{x(t)\}$:响应向量。

在频域中我们有:

$$(a.3.9) \quad (-\omega^2[M] + j\omega[C] + [K])\{X(j\omega)\} = \{F(j\omega)\}.$$

根据 A.1.2.2 节定义的那两个矩阵

$$[A] = \begin{bmatrix} [0] & [M] \\ [M] & [C] \end{bmatrix} \text{ 和 } [B] = \begin{bmatrix} -[M] & [0] \\ [0] & [k] \end{bmatrix},$$

我们可以把(a.3.8)式重新写成系统的状态 - 空间描述方程:

$$(a.3.10) \quad \begin{aligned} \{\dot{\mathbf{x}}(t)\} &= [\mathbf{A}]\{\mathbf{x}(t)\} + [\mathbf{B}]\{\mathbf{u}(t)\} \\ \{\mathbf{y}(t)\} &= [\mathbf{C}]\{\mathbf{x}(t)\} + [\mathbf{D}]\{\mathbf{u}(t)\}, \end{aligned}$$

式中 $\{\mathbf{x}(t)\}$: 状态向量;

$\{\mathbf{u}(t)\}$: 输入向量;

$\{\mathbf{y}(t)\}$: 输出向量;

$[\mathbf{A}]$: 状态转移矩阵;

$[\mathbf{B}]$: 输入矩阵;

$[\mathbf{C}]$: 输出矩阵;

$[\mathbf{D}]$: 直接输入 - 输出传输矩阵。

四个矩阵的组合 $[[\mathbf{A}], [\mathbf{B}], [\mathbf{C}], [\mathbf{D}]]$ 叫做系统的实现,因为它描述的是系统在任意时刻对已知输入信号的响应。这四个矩阵取决于如何选择系统的状态变量、输入变量及输出变量。假如我们这样来选择输入、输出和状态向量:

$$\{\mathbf{u}(t)\} = \{f(t)\}, \{\mathbf{y}(t)\} = \{x(t)\}, \{\mathbf{x}(t)\} = \begin{Bmatrix} \{\dot{x}(t)\} \\ \{x(t)\} \end{Bmatrix},$$

则四个矩阵分别为:

$$[\mathbf{A}] = -[\mathbf{A}]^{-1}[\mathbf{B}], [\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} [\mathbf{M}]^{-1} \\ [0] \end{bmatrix}, [\mathbf{C}] = [[0] \quad [I]], [\mathbf{D}] = [0].$$

由 $[\mathbf{A}]$ 的特征值可以得出系统极点、模态向量和模态参预向量。如果 $[\mathbf{T}]$ 是一个非奇异方阵,由它可以确定状态向量 $\{\mathbf{x}(t)\}$ 的一个变换,那么矩阵组合

$$[[\mathbf{T}][\mathbf{A}][\mathbf{T}]^{-1}, [\mathbf{T}][\mathbf{B}], [\mathbf{C}][\mathbf{T}]^{-1}, [\mathbf{D}]]$$

也是系统的一个实现,可见系统的实现有无穷多个。

A.3.2.5 低阶完整模型与高阶不完整模型

根据模态阶数或可观测的模态数 N_m 与响应点数 N_o 之间的关系,直接模型法可以分为两类:

低阶完整模型把响应描述为测量数据中全部可观测模态的一个线性组合,因此有:

$$(a.3.11) \quad N_o \leq N_m$$

高阶不完整模型允许响应点数多于可观测的模态数:

$$(a.3.12) \quad N_o > N_m$$

A.3.2.6 实模态振型与复模态振型

我们在 A.1.2.6 节已经说明,比例阻尼或无阻尼系统的极点都是复值的,而且是纯虚的,它们的模态都是纯模态(总能换算成实值模态振型)。然而非比例阻尼系统具有复值极点和复值模态振型向量。一般对于小阻尼结构,假定它是比例阻尼还是非比例阻尼差别不大。对于阻尼较大的结构,特别是那些具有集总阻尼部件的结构(例如装备完善的汽车),多半认为是非比例阻尼的。根据试验目的的不同,我们可以选择不同的参数估计方法,估计复模态,或估计纯模态。例如,欲将实验得到的模态与通过有限元模型计算得来的模态加以比较,那么实验模态应当是实模态。

A.3.2.7 时域估计与频域估计

直接以输入-输出信号的时间历程为根据的参数估计方法叫做时域法。如果根据模态模型进行估计,时域法用的是(a.3.2)式。以输入-输出信号在频域中的关系为根据的参数识别方法叫做频域法。若根据模态模型进行参数估计,则频域法采用式(a.3.1)。这种区别好似人为的,因为均匀离散的信号经由傅立叶变换可以很容易地在时域和频域之间变来变去。然而事实上这两种方法大不一样,我们将在 A.3.6 节讨论它们之间的主要差别。

A.3.2.8 分 类

表 a.3.1 给出了最为熟知的模态参数估计方法的一个总结和分类。此表不求完整。如果根据估计方法首次问世的时间排队的话,它们的演变似乎是:

- 从单自由度估计到多自由度估计,
- 从局部估计到整体估计,或从单输出估计到多输出估计,
- 从单输入估计到多输入估计。

参考文献 a.3.1 根据输入数据的特性(是初始条件已知的自由衰减响应,还是输入力已知的强迫响应)和欲识别模型之特性(模态模型,还是直接模型)给出了关于多自由度估计法的一种分类。

表 a.3.1 参数识别方法总结

方法	单/多自由度	局部/整体估计	单/多输入	模态/直接模型	时/频域	极点或振型	实/复模态
峰值检测	单	局部	单入	模态	频域	极点	
振型检测	单	局部	单入	模态	频域	振型	实或复
圆拟合	单	局部	单入	模态	频域	极点+振型	实或复
Ibrahim	多	整体	多人	模态	时域	极点+振型	复
多参考点 LSCE	多	整体	多人	模态	时域	极点	
ERA	多	整体	多人	直接	时域	极点+振型	复
TDPI	多	整体	多人	直接	时域	极点+振型	复
非线性 LSFD	多	整体	多人	模态	频域	极点+振型	实或复
ISSPA	多	整体	多人	直接	频域	极点+振型	实
正交多项式	多	整体	多人	模态	频域	极点+振型	实或复
FDPI	多	整体(?)	多人	直接	频域	极点+振型	实或复
SFD	多	整体	单入	模态	频域	极点+振型	实或复
CMIF	多	整体	多人	模态	频域	极点+振型	实或复
注: LSCE;最小二乘复指数; ERA;特征系统实现算法; TDPI; 时域直接参数识别; LSFD;最小二乘频域; ISSPA;结构系统参数识别; FDPI;频域直接参数识别; SFD;同时频域; CMIF;复模态指示函数。							

A.3.3 单自由度法

单自由度方法速度很快,几乎不需要什么计算和计算机内存,因此在当前小型二通道或四通道傅立叶分析仪中,都把这种方法做成内置选项。然而随着计算机的发展,内存不断扩大,计算速度越来越快,在大多数实际应用中,单自由度方法已让位给更加复杂精巧的多自由度方法。尽管如此,本节还是要讨论一下峰值检测、模态检测和圆拟和方法。

A.3.3.1 峰值检测

峰值检测是一种单自由度方法,它以频域中的模态模型为根据对系统极点进行局部估计(固有频率和阻尼)。峰值检测方法基于这样的事实:在固有频率附近,频响函数通过自己的极值,此时其实部为零(同相部分最小),而虚部和幅值最大(相移达 90° , 幅度达峰值)(图 a.3.2)。出现极值的那个频率就是阻尼固有频率 ω_r 的良好估计。相应的阻尼比 ζ_r 的估计可用半功率点法得到。设 ω_1 和 ω_2 分处在阻尼固有频率 ω_r 的两侧($\omega_1 < \omega_r < \omega_2$),则

$$(a.3.13) \quad |H(j\omega_1)| = |H(j\omega_2)| = \frac{|H(j\omega_r)|}{\sqrt{2}}.$$

参考文献 a.3.3 证明:

$$(a.3.14) \quad \zeta_r = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\omega_r}$$

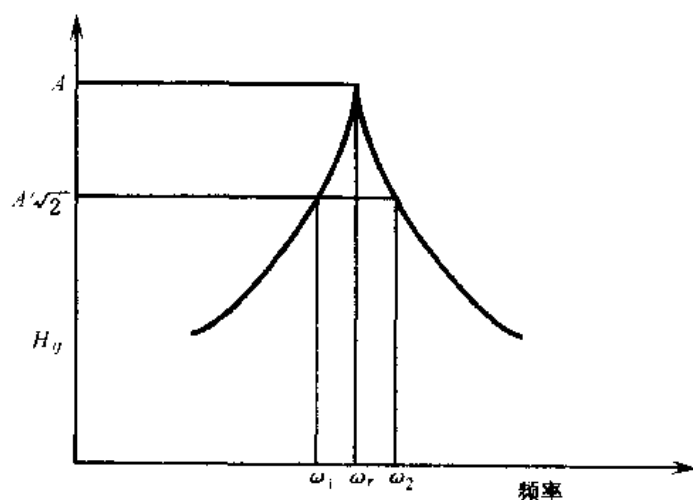


图 a.3.2 对频响函数的幅值进行峰值和模态检测

A.3.3.2 模态检测

模态检测是根据频域中的模态模型对复模态(或实模态)向量进行局部估计的一种单自由度方法。在(a.3.4)式中略去剩余项,则单个频响函数在 ω_r 处的值近似为:

$$(a.3.15) \quad H_{ij}(j\omega_r) \approx \frac{Q_r \Psi_{ir} \Psi_{jr}}{(j\omega_r - (\sigma_r + j\omega_r))} \approx \frac{Q_r \Psi_{ir} \Psi_{jr}}{-\sigma_r} \approx \frac{A_{ijr}}{-\sigma_r}.$$

由此式可见,频响函数在 ω_r 处的值乘以模态阻尼因子 σ_r , 就是留数(即模态振型系数)的估计

值(图 a.3.2)。利用这种模态检测方法之前,先要估计出 ω_r 。

A.3.3.3 圆拟合

圆拟合是一种单自由度方法,用频域中的模态模型对系统极点和复模态(或实模态)向量进行局部估计。此方法依据的事实是:单自由度系统的速度频响应函数(速度对力)在奈奎斯特图(即实部对虚部图)上呈现为一个圆(参考文献 a.3.3 和 a.3.4)。如果把其他模态的影响近似为一个复常数,那么在共振频率 ω_r 附近,频响应函数的基本公式为:

$$(a.3.16) \quad H_{ij}(j\omega) = \frac{U + jV}{-\sigma + j(\omega - \omega_r)} + R + jI.$$

因此,首先要选择共振频率附近的一组频率响应点,通过这些点拟合成一个圆(图 a.3.3)。

阻尼固有频率 ω_r 可以看成是复平面上数据点之间角度变化率最大(角间隔最大)的那个点的频率,也可以看成是相位角与圆心的相位角最为接近的那个数据点的频率。对于分得相当开的模态而言,二者的差别是很小的。

阻尼比 ζ_r 估计如下:

$$(a.3.17) \quad \zeta_r = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_r (\tan(\theta_1/2) + \tan(\theta_2/2))},$$

式中 ω_1, ω_2 : 分据在 ω_r 两侧的两个频率点;

θ_1, θ_2 : 分别为频率点 ω_1 和 ω_2 的半径与 ω_r 的半径之间的夹角(图 a.3.3)。

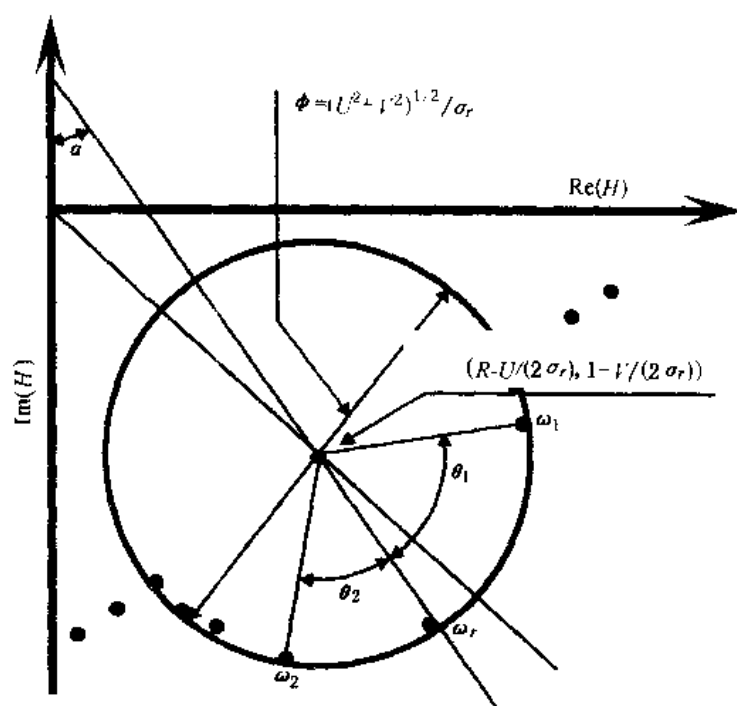


图 a.3.3 圆拟合图

圆的直径和阻尼固有频率点的角位置含有复留数 $U + jV$ 的信息:

$$(a.3.18) \quad \phi = \frac{\sqrt{U^2 + V^2}}{\sigma_r},$$

$$\tan(\alpha) = \frac{U}{V}.$$

式中 ϕ : 圆的直径;

α : 圆心与固有频率点的连线跟虚轴之间的夹角。

圆拟合法速度也很快, 但为避免结果出错, 特别是在模态节点附近, 需要操作者参预。

A.3.4 多自由度时域法

由于目前计算机的内存大, 速度快, 多自由度法在实践中很容易应用。这种方法采用的是动态系统比较完整的模型, 因此所得结果比单自由度法更加可信。本节将讨论几种时域方法: Ibrahim 时域法, 多参考点最小二乘复指数法, 特征系统实现算法以及时域直接参数识别法。所有这些方法都是利用时域数据进行参数估计的。在 A.3.6 节, 我们将对时域法和频域法做一比较。

A.3.4.1 Ibrahim 时域法(ITD)

Ibrahim 时域方法(参考文献 a.3.5)发展成为一种多自由度方法, 形成了对极点和复(或实)模态振型的整体参数估计。这种方法用的是多输入时域数据, 并根据模态模型进行估计。我们将模态模型时域方程式(a.3.2)就采样次数加以扩展可得下式:

$$(a.3.19) \quad [h(t)]_{ik} = [V] \begin{bmatrix} e^{\Lambda \Delta t} \\ \vdots \\ e^{\Lambda (i-1) \Delta t} \end{bmatrix} [L],$$

$$\text{其中 } [h(t)]_{ik} = \begin{bmatrix} [h(t)] & [h(t+\Delta t)] & \cdots & [h(t+(k-1)\Delta t)] \\ [h(t+\Delta t)] & [h(t+2\Delta t)] & \cdots & [h(t+k\Delta t)] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [h(t+(i-1)\Delta t)] & [h(t+i\Delta t)] & \cdots & [h(t+(k+i-2)\Delta t)] \end{bmatrix} \quad \text{叫做}$$

Hankel 矩阵,

$$[V] = \begin{bmatrix} [V] \\ [V] \begin{bmatrix} e^{\Lambda \Delta t} \\ \vdots \\ e^{\Lambda (i-1) \Delta t} \end{bmatrix} \\ [V] \begin{bmatrix} e^{\Lambda (i-1) \Delta t} \end{bmatrix} \end{bmatrix}, [L] = \begin{bmatrix} [L] & \begin{bmatrix} e^{\Lambda \Delta t} \\ \vdots \\ e^{\Lambda (k-1) \Delta t} \end{bmatrix} [L] \end{bmatrix},$$

式中 i, k : 分别为列向和行向时移计数符号。

让我们来找出 $[h(t)]_{ik}$ 跟它移动一个采样时间后的表达式之间的关系。移动一个采样时间后, $[h(t)]_{ik}$ 变成:

$$(a.3.20) \quad [h(t+\Delta t)]_{ik} = [V] \begin{bmatrix} e^{\Lambda \Delta t} \\ \vdots \\ e^{\Lambda \Delta t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\Lambda \Delta t} \\ \vdots \\ e^{\Lambda \Delta t} \end{bmatrix} [L].$$

在上式中代入恒等式 $[V]^+ [V] = [I]$ (这里, $[V]^+$ 是 $[V]$ 的广义逆), 可得下式:

$$(a.3.21) \quad [h(t+\Delta t)]_{ik} = [V] \begin{bmatrix} e^{\Lambda \Delta t} \\ \vdots \\ e^{\Lambda \Delta t} \end{bmatrix} [V]^+ [V] \begin{bmatrix} e^{\Lambda \Delta t} \\ \vdots \\ e^{\Lambda \Delta t} \end{bmatrix} [L].$$

比较(a.3.19)式, 则上式变为:

$$(a.3.22) \quad [h(t+\Delta t)]_{ik} = [V] \begin{bmatrix} e^{\Lambda \Delta t} \\ \vdots \\ e^{\Lambda \Delta t} \end{bmatrix} [V]^+ [h(t)]_{ik}, \text{ 或}$$

$$[h(t + \Delta t)]_{ik} = [W][h(t)]_{ik},$$

$$\text{式中 } [W] = [V] \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 \Delta t} \\ \vdots \\ e^{\lambda_N \Delta t} \end{bmatrix} [V]^*.$$

上式中的 Hankel 矩阵 $[h(t + \Delta t)]_{ik}$ 和 $[h(t)]_{ik}$ 由测量数据得到, 用它们可以估计矩阵 $[W]$ 。然后我们把矩阵 $[W]$ 的定义重新写成特征值问题表达式:

$$(a.3.23) \quad [W][V] = [V] \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 \Delta t} \\ \vdots \\ e^{\lambda_N \Delta t} \end{bmatrix}.$$

可见, 由特征值 $e^{\lambda \Delta t}$ 可以求得系统极点 λ_r , 由特征向量可求得相应的模态振型向量 $[V] = [\Psi_1 \cdots \Psi_N \quad \Psi_1^* \cdots \Psi_N^*]$.

利用类似的办法可以求出模态参预因子向量, 不过要先以 $[L]^+$ 右乘 (a.3.19) 式的两端。

A.3.4.2 多参考点最小二乘复指数法 (LSCE)

多参考点最小二乘复指数法是参考文献 a.3.4 所描述的最小二乘复指数法的多输入形式, 是一种对极点和模态参预因子进行整体估计的多自由度方法。它是从模态模型的时域形式 (a.3.2) 式出发的。对于采样数据, 此式变为 (就第 n 个时间样本):

$$(a.3.24) \quad [h(n\Delta t)] = [V] \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 \Delta t} \\ \vdots \\ e^{\lambda_N \Delta t} \end{bmatrix} [L].$$

与响应点 o 相对应的脉冲响应矩阵的第 o 行为:

$$(a.3.25) \quad \begin{aligned} \langle h(n\Delta t) \rangle_o &= \sum_{r=1}^N (\Psi_{or} e^{\lambda_r n \Delta t} \langle L \rangle_r + \Psi_{or}^* e^{\lambda_r^* n \Delta t} \langle L \rangle_r^*) \text{ 或} \\ \langle h(n\Delta t) \rangle_o &= \sum_{r=1}^N (\Psi_{or} z_r^n \langle L \rangle_r + \Psi_{or}^* z_r^{n*} \langle L \rangle_r^*), \end{aligned}$$

式中 $z_r = e^{\lambda_r \Delta t}$ 。

复指数 z_r 和模态参预因子 $\langle L \rangle_r$ 的组合 $z_r \langle L \rangle_r$, 或 $z_r^* \langle L \rangle_r^*$, 与响应点 o 无关, 是下列 p 阶有限差分矩阵方程的一个解:

$$(a.3.26) \quad z_r^n \langle L \rangle_r \begin{bmatrix} I \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} + z_r^{n-1} \langle L \rangle_r [W]_1 + \cdots + z_r^{n-p} \langle L \rangle_r [W]_p = \langle 0 \rangle.$$

矩阵 $[W]_1, \dots, [W]_p$ 的维数是 $N_i \times N_i$, 即我们所考虑的输入点数。为了求得 $2N_m$ 个特征解 (或极点), 上式的阶数 p 必须满足下式:

$$(a.3.27) \quad p \geq \frac{2N_m}{N_i}.$$

因为响应点 o 的脉冲响应是 (a.3.26) 式的特征解 $z_r \langle L \rangle_r$, 或 $z_r^* \langle L \rangle_r^*$ 的线性组合 (见 a.3.25 式), 所以也是 (a.3.26) 式的一个解。因此有:

$$(a.3.28) \quad \langle h(n\Delta t) \rangle_o \begin{bmatrix} I \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} + \langle h((n-1)\Delta t) \rangle_o [W]_1 + \cdots + \langle h(n-p)\Delta t \rangle_o [W]_p = \langle 0 \rangle.$$

对所有响应点同时考虑上述方程, 就能够对矩阵系数 $[W]_1, \dots, [W]_p$ 进行整体最小二乘估计。一旦知道了这些矩阵系数, 式 (a.3.26) 即可重新写成一般特征值问题, 从中求出 pN_i 个特征值 z_r , 得到系统极点 λ_r 的估计, 以及与模态参预因子向量相对应的左特征向量 $\langle L \rangle_r$ 。

因为这种方法最为常用, 并且经常作为评判其他方法的一个参照, 所以附录 AA.3.1 就一个简单的单入-单出系统对这一方法给出了举例说明。

A.3.4.3 特征系统实现算法(ERA)

特征系统实现算法是一种在直接模型识别之后,根据多输入数据对系统极点、模态参预因子和复模态振型进行整体估计的多自由度时域法。参考文献 a.3.5 把系统实现理论的概念应用到了模态分析。

像(a.3.10)这样的状态-空间方程,用于时间间隔 Δt 恒定不变的离散信号时,具有如下形式:

$$(a.3.29) \quad \begin{aligned} \{x((k+1)\Delta t)\} &= [A]\{x(k\Delta t)\} + [B]\{u(k\Delta t)\}, \\ \{y(k\Delta t)\} &= [C]\{x(k\Delta t)\}. \end{aligned} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

假定系统的初始状态为零,并且每个输入点上零瞬时的输入都是脉冲,那么这些输入就构成一个单位矩阵: $\{u(0)\} = [I_N]$ 。于是在后继瞬时 k 的那些输出便构成所谓 Markov 参数矩阵:

$$(a.3.30) \quad \begin{aligned} [y(\Delta t)] &= [C][B][y(2\Delta t)] = [C][A][B]\cdots[y(k\Delta t)] = [C][A]^{k-1}[B], \\ \text{这些参数矩阵又可以集中起来构成一个广义 Hankel 矩阵;} \end{aligned}$$

$$(a.3.31) \quad [h(k\Delta t)]_{pq} = \begin{bmatrix} [y(k\Delta t)] & [y((k+j_1)\Delta t)] & \cdots & [y((k+j_{q-1})\Delta t)] \\ [y((k+i_1)\Delta t)] & [y((k+i_1+j_1)\Delta t)] & \cdots & [y((k+i_1+j_{q-1})\Delta t)] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [y((k+i_{p-1})\Delta t)] & [y((k+i_{p-1}+j_1)\Delta t)] & \cdots & [y((k+i_{p-1}+j_{q-1})\Delta t)] \end{bmatrix},$$

其中, i_1, \dots, i_{p-1} 和 j_1, \dots, j_{q-1} 为任意整数。根据 Markov 参数的定义,可以把上式写成紧凑形式:

$$(a.3.32) \quad [h(k\Delta t)]_{pq} = [\mathcal{C}]_p [A]^{k-1} [\mathcal{B}]_q,$$

$$\text{式中 } [\mathcal{C}]_p = \begin{bmatrix} [C] \\ [C][A]^{i_1} \\ \vdots \\ [C][A]^{i_{p-1}} \end{bmatrix}, \text{叫做可观测性矩阵,}$$

$$[\mathcal{B}]_q = [[B] \quad [A]^{j_1}[B] \quad \cdots \quad [A]^{j_{q-1}}[B]], \text{叫做可控制性矩阵。}$$

$[h(\Delta t)]_{pq}$ 的广义逆 $[h(\Delta t)]_{qp}^+$ 服从下式:

$$(a.3.33) \quad [\mathcal{B}]_q [h(\Delta t)]_{pq}^+ [\mathcal{C}]_p = [I_N],$$

这是因为:

$$(a.3.34) \quad \begin{aligned} [h(\Delta t)]_{pq} &= [h(\Delta t)]_{pq} [h(\Delta t)]_{pq}^+ [h(\Delta t)]_{pq} \\ &= [\mathcal{C}]_p [\mathcal{B}]_q [h(\Delta t)]_{qp}^+ [\mathcal{C}]_p [\mathcal{B}]_q \\ &= [\mathcal{C}]_p [\mathcal{B}]_q = [h(\Delta t)]_{pq}. \end{aligned}$$

对 $[h(\Delta t)]_{pq}$ 进行奇异值分解:

$$(a.3.35) \quad [h(\Delta t)]_{pq} = [P] [S] [Q]^T,$$

其中, $[P]$ 和 $[Q]$ 是奇异向量构成的正交矩阵, $[S]$ 是奇异值构成的一个对角矩阵, 而广

义逆 $[\mathbf{h}(\Delta t)]_{pq}^+$ 为(只考虑非零奇异值与相应的左、右奇异向量):

$$(a.3.36) \quad [\mathbf{h}(\Delta t)]_{pq}^+ = [\mathbf{Q}] [\mathbf{\Lambda} S_{\Lambda}]^{-1} [\mathbf{P}]^T.$$

将式(a.3.32)、(a.3.33)和(a.3.36)结合起来便得下式:

$$(a.3.37) \quad [\mathbf{\Lambda} S_{\Lambda}]^{-1} [\mathbf{P}]^T [\mathcal{E}]_p [\mathbf{A}]^k [\mathcal{B}]_q [\mathbf{Q}] = \left\{ [\mathbf{\Lambda} S_{\Lambda}]^{-1} [\mathbf{P}]^T [\mathbf{h}(2\Delta t)]_{pq} [\mathbf{Q}] \right\}^k.$$

现在,我们可以把广义的 Hankel 矩阵块重写成:

$$(a.3.38) \quad [\mathbf{h}(k\Delta t)]_{pq} = [\mathcal{E}]_p^T [\mathbf{A}]^{k-1} [\mathcal{B}]_q \\ = [\mathbf{P}] [\mathbf{\Lambda} S_{\Lambda}]^{\frac{1}{2}} \left\{ [\mathbf{\Lambda} S_{\Lambda}]^{-\frac{1}{2}} [\mathbf{P}]^T [\mathbf{h}(2\Delta t)]_{pq} [\mathbf{Q}] [\mathbf{\Lambda} S_{\Lambda}]^{-\frac{1}{2}} \right\}^{k-1} [\mathbf{\Lambda} S_{\Lambda}]^{\frac{1}{2}} [\mathbf{Q}]^T.$$

以下面的行列选择矩阵

$$[\mathbf{E}_o]_{N_o \times p N_o} = \left[\begin{bmatrix} \mathbf{\Lambda} I_{\Lambda} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \dots \right] \text{ 和 } [\mathbf{E}_i]_{q N_i \times v_i} = \begin{bmatrix} [\mathbf{\Lambda} I_{\Lambda}] \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

分别左乘右乘(a.3.38)式的 Hankel 分块矩阵,即可得到响应矩阵 $[\mathbf{y}(k\Delta t)]$ 的表达式(此矩阵等于在假定单位脉冲输入条件下的脉冲响应矩阵):

$$(a.3.39) \quad [\mathbf{y}(k\Delta t)] = [\mathbf{h}(k\Delta t)] \\ = [\mathbf{E}_o]^T [\mathbf{P}] [\mathbf{\Lambda} S_{\Lambda}]^{\frac{1}{2}} \left\{ [\mathbf{\Lambda} S_{\Lambda}]^{-\frac{1}{2}} [\mathbf{P}]^T [\mathbf{h}(2\Delta t)]_{pq} [\mathbf{Q}] [\mathbf{\Lambda} S_{\Lambda}]^{-\frac{1}{2}} \right\}^{k-1} [\mathbf{\Lambda} S_{\Lambda}]^{\frac{1}{2}} [\mathbf{Q}]^T [\mathbf{E}_i].$$

奇异值分解保证 $[\mathbf{P}]$, $[\mathbf{Q}]$ 和 $[\mathbf{\Lambda} S_{\Lambda}]$ 这些矩阵的秩等于状态向量的维数。将上面的表达式与 Markov 参数(式(a.3.30))加以比较即知,组合

$$\left\{ [\mathbf{\Lambda} S_{\Lambda}]^{-\frac{1}{2}} [\mathbf{P}]^T [\mathbf{h}(2\Delta t)]_{pq} [\mathbf{Q}] [\mathbf{\Lambda} S_{\Lambda}]^{-\frac{1}{2}}, [\mathbf{\Lambda} S_{\Lambda}]^{\frac{1}{2}} [\mathbf{Q}]^T [\mathbf{E}_i], [\mathbf{E}_o]^T [\mathbf{P}] [\mathbf{\Lambda} S_{\Lambda}]^{\frac{1}{2}} \right\}.$$

是系统的一个最小阶实现。由特征值问题

$$(a.3.40) \quad \left\{ [\mathbf{\Lambda} S_{\Lambda}]^{-\frac{1}{2}} [\mathbf{P}]^T [\mathbf{h}(2\Delta t)]_{pq} [\mathbf{Q}] [\mathbf{\Lambda} S_{\Lambda}]^{-\frac{1}{2}} \right\} [\mathbf{T}] = [\mathbf{T}] [\mathbf{\Lambda} \Gamma_{\Lambda}].$$

可以得出特征值,特征值又决定系统极点,因为 $[\mathbf{\Lambda} \Gamma_{\Lambda}] = [\mathbf{\Lambda} e^{\Delta t \Lambda}]$ 。由下式可求得系统的模态向量和模态参预因子向量:

$$(a.3.41) \quad [\mathbf{V}] = [\mathbf{E}_o]^T [\mathbf{P}] [\mathbf{\Lambda} S_{\Lambda}]^{\frac{1}{2}} [\mathbf{T}]$$

$$[\mathbf{L}] = [\mathbf{T}]^{-1} [\mathbf{\Lambda} S_{\Lambda}]^{\frac{1}{2}} [\mathbf{Q}]^T [\mathbf{E}_i].$$

A.3.4.4 时域直接参数识别(TDPI)

时域直接参数识别方法(参考文献 a.3.7)是一种对系统极点、模态振型和模态参预因子进行整体估计的多自由度识别法。这种技术适合于处理多输入数据。它直接估计系统的基本差分方程的系数。因此,该方法的目标是估计结构的低阶完整直接时域模型。我们研究的系

统可以用一个自回归滑动平均(ARMA)模型来描述:

a.3.42)

$$\{x(k\Delta t)\} + [W_o]_1 \{x((k-1)\Delta t)\} + [W_o]_2 \{x((k-2)\Delta t)\} + \cdots + [W_o]_p \{x((k-p)\Delta t)\} \\ = [W_i]_0 \{f(k\Delta t)\} + [W_i]_1 \{f((k-1)\Delta t)\} + \cdots + [W_i]_{p-1} \{f((k-p+1)\Delta t)\}.$$

式中 $\{f(k\Delta t)\}$: N_i 维输入(力)信号序列;

$\{x(k\Delta t)\}$: N_o 维输出(位移)信号序列;

$[W_o]_k$: $N_o \times N_o$ 实矩阵;

$[W_i]_l$: $N_o \times N_i$ 实矩阵;

p : 模型阶数, 选择阶数时应满足 $pN_o \geq 2N_m$ ($2N_m$ 是系统极点数)。

测量出时间序列 $\{x(k\Delta t)\}$ 和 $\{f(k\Delta t)\}$ 之后, 我们就用上式计算矩阵 $[W_o]_k$ 和 $[W_i]_l$ 的最小二乘估计。估计的惟一性条件是: $[x][x]^T$ 和 $[f][f]^T$ 的秩分别为 N_o 和 N_i , 其中

$$[x] = \begin{bmatrix} \{x(0)\}_1 & \cdots & \{x(0)\}_{N_o} & \cdots & \{x(N_s\Delta t)\}_1 & \cdots & \{x(N_s\Delta t)\}_{N_o} \end{bmatrix},$$

$$[f] = \begin{bmatrix} \{f(0)\}_1 & \cdots & \{f(0)\}_{N_i} & \cdots & \{f(N_s\Delta t)\}_1 & \cdots & \{f(N_s\Delta t)\}_{N_i} \end{bmatrix},$$

式中 N_s : 时间采样数;

N_s : 数据组数目。

如果力是一个脉冲, 那么(a.3.42)式就简化为:

$$(a.3.43) \{h(k\Delta t)\} + [W_o]_1 \{h((k-1)\Delta t)\} + \cdots + [W_o]_p \{h((k-p)\Delta t)\} = \{0\},$$

考虑到 Maxwell 互易原理, 上式等同于多参考点最小二乘复指数法的基本方程(a.3.28)式。

参考文献 a.3.7 证明, 系统极点和模态振型向量可由下面的随伴矩阵特征值分解得出:

$$\begin{bmatrix} [W_o]_1 & [W_o]_2 & \cdots & [W_o]_{p-1} & [W_o]_p \\ [\backslash I_{N_o}] & [0] & \cdots & [0] & [0] \\ [0] & [\backslash I_{N_o}] & \cdots & [0] & [0] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ [0] & [0] & \cdots & [\backslash I_{N_o}] & [0] \end{bmatrix}.$$

而模态参预因子可由矩阵 $[W_i]_l$ 计算出来。

参考文献 a.3.7 还证明, 以自回归滑动平均作为出发点的时域直接参数估计法, 包括了多参考点最小二乘复指数法和 Ibrahim 时域法, 后两种方法是前者的特例。

A.3.5 多自由度频域法

这一节我们转到频域中来, 继续讨论多自由度估计方法。我们的讨论包括最小二乘频域法, 结构系统参数识别, 正交多项式法, 频域直接参数识别以及复模态指示函数。所有这些方法在估计模态参数时都采用频域数据。在 A.3.6 节中我们将此种方法与时域方法加以比较。

A.3.5.1 (非线性)最小二乘频域法(LSFD)

非线性最小二乘频域法(参考文献 a.3.8)是一种对系统极点、模态振型和模态参预因子

进行整体估计(假定应用于多输入)的多自由度方法。它估计参数时采用频域模态模型((a.3.1)式)。在我们关心的频率范围内,响应点 i 和输入点 j 之间的频响函数近似为:

$$(a.3.44) \quad H_{ij}(j\omega) = \sum_{r=1}^{N_m} \left(\frac{\Psi_{ir} L_{rj}}{(j\omega - \lambda_r)} + \frac{\Psi_{ir}^* L_{rj}^*}{(j\omega - \lambda_r^*)} \right) + UR_{ij} - \frac{LR_{ij}}{\omega^2},$$

式中 UR_{ij} :上剩余项;

LR_{ij} :下剩余项。

这两个剩余项是频带范围上下那些模态之影响的近似。上式左边是实测来的频响函数,右边是作为 ω 的函数的模态模型,带有 N_u 个未知参数 $\lambda_r, \Psi_{ir}, L_{rj}, UR_{ij}$ 和 LR_{ij} ,以下式表示:

$$(a.3.45) \quad G_{ij}(j\omega) = G_{ij}(j\omega, \lambda_r, \Psi_{ir}, L_{rj}, UR_{ij}, LR_{ij}) \mid_{r=1, \dots, N_m}$$

实测频响函数与估计频响函数之间的差为:

$$(a.3.46) \quad e_{ij}(j\omega) = H_{ij}(j\omega) - G_{ij}(j\omega)$$

我们关心的频带 $(\omega_0, \dots, \omega_{N_f})$ 内的总方差是:

$$(a.3.47) \quad E_{ij} = \sum_{f=0}^{N_f} e_{ij}(j\omega_f) e_{ij}^*(j\omega_f)$$

全面考虑 N_i 个输入点和 N_o 个输出点之间的全部频响函数,则总方差为:

$$(a.3.48) \quad E = \sum_{i=1}^{N_o} \sum_{j=1}^{N_i} E_{ij}$$

用下面的方程组可以估计出 $\lambda_r, \Psi_{ir}, L_{rj}, UR_{ij}$ 和 LR_{ij} 等 N_u 个未知参数(以 r_k 表示),它将使总误差最小:

$$(a.3.49) \quad \begin{cases} \frac{\partial E}{\partial r_1} = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial E}{\partial r_{N_u}} = 0 \end{cases}$$

因为这组方程是未知量的高度非线性方程,所以要用迭代法围绕着一个带有未知参数初始值的模态模型,作为一个线性化问题(一阶级数展式)来解。由于迭代法的固有缺点,例如要求各个未知量的初始值要好,收敛速度受到限制,存在着发散的危险,要求操作者具有相当的经验和技能等等,因此这种迭代法决难普遍通行。但是它对于进一步改善已经相当可信的模态模型的精度可能还是个有用的工具。

如果系统极点 λ_r 和模态参预因子 L_{rj} 已经估计出来(例如用多参考点最小二乘复指数法),那么(a.3.44)式就变成了关于其他未知参数即模态位移 Ψ_{ir} 和剩余项 UR_{ij} 与 LR_{ij} 的线性方程了。这样的线性方程按照某种最小二乘意义(参考文献 a.3.9)解起来就相对容易些。因为这种方法是通过同时分析每个响应自由度和全部参考自由度之间的数据来估计振型系数的,所以它给出的是各模态振型的整体估计(亦即与参考自由度无关)。

A.3.5.2 结构系统参数识别(ISSPA)

参考文献 a.3.10 将结构系统参数识别(ISSPA)法作为一种频域识别方法给予了论述,该识别法根据多输入多响应测量数据识别高阶不完整直接模型。它的目标是对系统极点和纯

(或“实”)模态振型进行整体估计。

以质量矩阵的逆矩阵 $[M]^{-1}$ 左乘频域系统方程(a.3.9),对于给定的频率 ω_i ,则有:

$$(a.3.50) \quad \left(-\omega_i^2 [I] + j\omega_i [M]^{-1} [C] + [M]^{-1} [K] \right) \{X(j\omega_i)\} = \{F_g(j\omega_i)\},$$

式中, $\{F_g(j\omega_i)\}$ 是个广义力,它是基础激励、力激励和质量矩阵的函数。就所有的激励频率 ω_i 考虑该方程,并把 ω_i 集中写成 $[\Omega]$,我们得到下面的系统方程:

$$(a.3.51) \quad -[X][\Omega]^2 + j[M]^{-1}[C][X][\Omega] + [M]^{-1}[K][X] = [F_g].$$

因为假定激励是谐波的,则激励力矩阵 $[F_g]$ 便是实值的,故此我们把上述方程分解成实部和虚部,便得到下面的结果(令 $[X] = [X_R] + j[X_I]$):

(a.3.52)

$$[X_R]^T [M]^{-1} [K] - [\Omega] [X_I]^T [M]^{-1} [C] - [\Omega]^2 [X_R]^T = [F_g]^T$$

$$[X_I]^T [M]^{-1} [K] + [\Omega] [X_R]^T [M]^{-1} [C] - [\Omega]^2 [X_I]^T = [0].$$

如果激励频率的数目超过了输出数目(即质量阵、刚度阵和阻尼阵的维数),那么我们可以应用 $[X_R]$ 和 $[X_I]$ 的广义逆,按某种最小二乘意义分别从(a.3.52)式的两个方程解出 $[M]^{-1}[K]$ 和 $[M]^{-1}[C]$:

$$(a.3.53) \quad [M]^{-1} [K] = \left([X_R]^T + [\Omega] [X_I]^T [X_R]^T + [\Omega]^2 [X_I]^T \right)^+ \times$$

$$\left([\Omega]^2 [X_R]^T + [F_g]^T + [\Omega] [X_I]^T [X_R]^T + [\Omega] [X_I]^T \right),$$

$$[M]^{-1} [C] =$$

$$- [X_I]^T + \left([\Omega] [X_R]^T + [\Omega] [F_g]^T - [\Omega] [X_R]^T [M]^{-1} [K] \right).$$

这种方法要求响应点数至少与待识别的模态数一样多。 $[M]^{-1}[k]$ 这个质量修正刚度矩阵定义了一种特征值问题:

$$(a.3.54) \quad [M]^{-1} [K] \{\Psi\}_r = \omega_r^2 \{\Psi\}_r,$$

由此可得系统的固有频率和纯模态振型。根据质量修正阻尼矩阵 $[M]^{-1}[C]$ 可以估计系统的比例阻尼值(参考文献 a.3.10)。

上述方法没有给出有关模态参预因子的任何信息。由于把系统方程分作两个方程(实部和虚部),结果所得矩阵严格说来不再是整体的最小二乘解;同样,在数据中混有较大噪声的情况下,阻尼估计可能也不准。

A.3.5.3 正交多项式法(OP)

参考文献 a.3.11 证明,利用正交多项式法可以根据多参考点频响函数整体估计出系统极点、模态振型与模态参预因子。它是一种多自由度法,根据模态模型的有理分式多项式形式估计参数:

$$(a.3.55) \quad [H] \left([I] (j\omega)^p + [W_i]_{s-1} (j\omega)^{p-1} + \cdots + [W_i]_0 \right) = [W_o]_q (j\omega)^q + \cdots + [W_o]_0,$$

其中 $[W_i]_k: N_i \times N_i$ 实矩阵;

$[W_o]_l: N_o \times N_i$ 实矩阵;

p : W_i 多项式的阶次, 满足 $pN_i \geq 2N_m$, 这里 $2N_m$ 是系统极点数;

q : W_o 多项式的阶次, $q \geq p-1$;

系统极点和模态参预因子由下面的伴随矩阵的特征值和特征向量得出:

$$\begin{bmatrix} [W_i]_{p-1} & [\lambda I_N] & [0] & \cdots & [0] \\ [W_i]_{p-2} & [0] & [\lambda I_N] & \vdots & [0] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [W_i]_1 & [0] & [0] & \cdots & [\lambda I_N] \\ [W_i]_0 & [0] & [0] & \cdots & [0] \end{bmatrix},$$

模态振型向量由 $[W_o]_l$ 得出。

当测量数据用于足够多的离散频率时, 可能会产生一个关于未知矩阵 $[W_i]_k$ 和 $[W_o]_l$ 的超定方程组。但是, 在原始公式中, 特别是用于较高阶的多项式时, 这个方程组是病态的, 而且这两组矩阵必须同时予以估计, 结果导致一个很大的方程组。为了减少这些麻烦, 我们借助正交多项式重写这些矩阵多项式公式。命 $[\tau_k(j\omega)]$ 作为与加权函数 $[H(j\omega)]^* T [H(j\omega)]$ 正交的矩阵多项式的一个基, 又命 $[\theta_k(j\omega)]$ 构成与下面的单位加权函数正交的无量纲多项式的一个基:

$$(a.3.56) \quad \sum_{i=1}^{N_f} [\tau_k(j\omega_i)]^* T [H(j\omega_i)]^* T [H(j\omega_i)] [\tau_l(j\omega_i)] = \delta_{kl} [\lambda I_N],$$

$$\sum_{i=1}^{N_f} \theta_k^*(j\omega_i) \theta_l(j\omega_i) = \delta_{kl},$$

式中 k, l : 多项式的阶数;

δ_{kl} : Kronecker δ 函数, $\delta_{kl} = \begin{cases} 1, & k=l, \\ 0, & k \neq l. \end{cases}$

这样我们可以把(a.3.55)式变换成:

$$(a.3.57) \quad [H][\tau_p(j\omega)] + [\tau_{p-1}(j\omega)][W_i]_{p-1} + \cdots + [\tau_0(j\omega)][W_i]_0 \\ = \theta_q(j\omega)[W_o]_q + \cdots + \theta_q(j\omega)[W_o]_0.$$

矩阵 $[W_i]_k$ 和 $[W_o]_l$ 的估计是良态的, 而且可以单独计算。

频带外影响可以用一个超大模型来考虑, 这样的超大模型既可以通过增加 W_i 多项式的阶次得到, 也可以只通过增加 W_o 多项式的阶次而获得。

A.3.5.4 频域直接参数识别(FDPI)

频域直接参数识别法(参考文献 a.3.12)使用多输入-多输出频响函数测量数据识别低阶完整直接模型, 对系统的极点、振型和模态参预因子进行整体估计。下面几段我们将按三个步骤讨论这一识别过程。第一步是估计系统矩阵。第二步是从这些系统矩阵导出系统极点、振型及模态参预因子。第三步说明怎样利用数据减缩技术来实现一个完整的模型。

我们在 A.3.2.4. 节指出了将频域运动方程转化成一个状态空间方程的普通做法(即(a.3.10)式):

$$(a.3.10) \quad \dot{x}(t) = [A]x(t) + [B]u(t)$$

$$\{y(t)\} = [C]\{x(t)\} + [D]\{u(t)\};$$

由这个状态空间公式的频域形式可以得出传递函数矩阵的一般表达式:

$$(a.3.58) \quad [H(p)] = [C] \left[p \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix} - [A] \right]^{-1} [B] + [D],$$

于是,位移对力的传递函数遵从下式:

$$(a.3.59) \quad \left[p^2 \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix} + p[M]^{-1}[C] + [M]^{-1}[K] \right] [H(p)] = [M]^{-1},$$

加速度对力的传递函数矩阵服从:

$$(a.3.60) \quad \left[p^2 \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix} + p[M]^{-1}[C] + [M]^{-1}[K] \right] [H_a(p)] = p^2 [M]^{-1}.$$

上述这两个方程对于所有的 p 值因而对所有的 $j\omega$ 值均成立。如果可用的测量数据足够多,那么这两个方程中的任何一个都可以构成关于未知矩阵 $[M]^{-1}[C]$, $[M]^{-1}[K]$ 和 $[M]^{-1}$ 的一个超定方程组的基。用最小二乘法即可估计这些矩阵。在实践上,为了适合计算机内存大小、计算速度以及模型阶次检测等要求,必须采取数据减缩措施。后面我们将讨论数据减缩方法。

质量修正阻尼矩阵和质量修正刚度矩阵构成状态转移矩阵 $[A]$ 的内核:

$$(a.3.61) \quad [A] = \begin{bmatrix} -[M]^{-1}[C] & -[M]^{-1}[K] \\ \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix} & [0] \end{bmatrix}.$$

该矩阵的特征值就是系统极点(成复数共轭对),由其特征向量可得出模态向量(亦成复数共轭对)(见 A.1.2.2 和 A.1.2.3 节):

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_N & & \\ & & & \lambda_1^* & \\ 0 & & & & \ddots \\ & & & & & \lambda_N^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix}^* \end{bmatrix}, \\ [\Phi] = \begin{bmatrix} \lambda_1 \{\Psi\}_1 & \cdots & \lambda_N \{\Psi\}_N & \lambda_1^* \{\Psi\}_1^* & \cdots & \lambda_N^* \{\Psi\}_N^* \\ \{\Psi\}_1 & \cdots & \{\Psi\}_N & \{\Psi\}_1^* & \cdots & \{\Psi\}_N^* \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

A.1.2.7 节((a.1.74)式)已经说明,模态参预因子矩阵 $[L]$ 服从下式:

$$(a.3.62) \quad [L] = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix}^{-1} [V]^T,$$

其中 $\begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix}$: 模态 a 矩阵((a.1.66)式):

$$[V] = [\{\Psi\}_1 \cdots \{\Psi\}_N \quad \{\Psi\}_1^* \cdots \{\Psi\}_N^*];$$

$$[L] = \begin{bmatrix} [L'] \\ [L']^* \end{bmatrix}.$$

将上式与关于模态 a 矩阵的表达式相结合,并注意到下列事实:

$$[A] = -[A]^{-1}[B], [A] = \begin{bmatrix} [0] & [M] \\ [M] & [C] \end{bmatrix}, [B] = \begin{bmatrix} -[M] & [0] \\ [0] & [K] \end{bmatrix},$$

则有:

$$(a.3.63) \quad [L'] = \left[[\Psi] \left[\begin{array}{c} \Lambda' \\ \backslash \end{array} \right] - [\Psi^*] \left[\begin{array}{c} \Lambda'^* \\ \backslash \end{array} \right] [\Psi^*]^{-1} [\Psi] \right]^{-1} [M]^{-1}.$$

前面几段我们讨论了这一方法的一般轮廓。但是,只有当我们处理自由度等于频带范围内所出现的模态数这样的完整模型时,这一方法才是可操作的。参考文献 a.3.12 提出了一种数据压缩方法,该方法以采样频响函数矩阵的奇异值分解为基础:

$$(a.3.64) \quad \left[\left[H(j\omega_1) \right] \left[H(j\omega_2) \right] \cdots \left[H(j\omega_{N_f}) \right] \right] = [P] \left[\begin{array}{c} S \\ \backslash \end{array} \right] [R]^*{}^T,$$

式中 $[P], [R]$: 是正交矩阵;

$\left[\begin{array}{c} S \\ \backslash \end{array} \right]$: 具有 N_0 个奇异值的对角矩阵, 这 N_0 个奇异值为:

$$s_1 \geq s_2 \geq \cdots \geq s_N \geq s_{N+1} = s_{N+2} = \cdots = s_{N_f} = 0$$

与 N 个非零奇异值对应的左奇异向量构成转移矩阵 $[T]$ 的行。此转移矩阵把原始的频响函数矩阵转换成一个广义的(或者说压缩的)频响函数矩阵而不丢失任何信息:

$$(a.3.65) \quad [H_g(j\omega)]_{N \times N_f} = [T]_{N \times N_0} [H(j\omega)]_{N_0 \times N_f}.$$

理论上, N 将等于可观测的模态数。但实际上, 奇异值 s_{N+1}, \dots, s_{N_f} 将不会为零, 因而将丢失一些信息。广义频响函数矩阵按前几段的方法进行处理, 处理结果再乘以 $[T]^*{}^T$, 就又变回到物理空间。

同时频域法(参考文献 a.3.13)的处理思路与上相似, 但其数据减缩是以所选择的“独立”响应点为根据的。这种方法需要使用者的干预和经验。

频带外影响可以通过给(a.3.59)式额外增加一些项来处理:

$$(a.3.66) \quad \begin{aligned} & \left[p^2 \left[\begin{array}{c} I \\ \backslash \end{array} \right] + p [M]^{-1} [C] + [M]^{-1} [K] \right] [H(p)] \\ &= p^{-2} [M]^{-1} [K] [LR] + p^{-1} [M]^{-1} [C] [LR] + \\ & ([M]^{-1} + [LR] + [M]^{-1} [K] [UR]) + p [M]^{-1} [C] [UR] + p^2 [UR]. \end{aligned}$$

A.3.5.5 复模态指示函数(CMIF)

参考文献 a.3.14 描述了复模态指示函数法及其在多参考点输入试验中的应用。首先, CMIF 方法是以频域模态模型为根据的一种多自由度方法。在某种整体意义上, 它先是在频率分辨率的精度之内估计阻尼固有频率, 并估计对应的未经换算的模态振型。接下去再求得复数极点并进行模态比例换算。

CMIF 是频响函数矩阵的奇异值的对数幅值图。频响函数矩阵在给定频率 ω_k 处的奇异值分解是:

$$(a.3.67) \quad [H(j\omega_k)]_{N_0 \times N_f} = [P_k]_{N_0 \times N_1} \left[\begin{array}{c} S_k \\ \backslash \end{array} \right]_{N_1 \times N_1} [R_k]^*{}^T_{N_1 \times N_f}$$

$[P_k]$ 的正交列是 $[H(j\omega_k)]$ 的左奇异向量, 而 $[R_k]$ 的正交列则是 $[H(j\omega_k)]$ 的右奇异向量。 $\left[\begin{array}{c} S_k \\ \backslash \end{array} \right]$ 包含的奇异值按降次排列, 这些奇异值都是非负实数。(a.3.1)式把频响函数表示为模态参数的函数:

$$[H(j\omega)]_{N_0 \times N_f} = [V]_{N_f \times 2N_m} \left[j\omega \left[\begin{array}{c} I \\ \backslash \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} \Lambda \\ \backslash \end{array} \right] \right]_{2N_m \times 2N_m}^{-1} [L]_{2N_m \times N_0}.$$

在没有重根的情况下, 当 ω_k 在共振频率附近接近系统极点 λ_r 时, $1/(j\omega_k - \lambda_r)$ 这个量便

达最大值。因为 $[V]$ 和 $[L]$ 是常数阵,所以频响函数矩阵的幅值就决定于 $1/(j\omega_k - \lambda_r)$ 这些项。类似地,由于 $[P_k]$ 和 $[R_k]$ 在每一条谱线上含有单位长度向量,因此在奇异值分解公式中幅值信息作为频率的函数包含在奇异值矩阵 $[S_k]$ 中。可见,如果 $1/(j\omega_k - \lambda_r)$ 这一项达到最大值,那么奇异值,即 CMIF 图中最接近谱线的阻尼固有频率上的峰值也达到最大值。

共振频率附近,频响函数矩阵由(a.3.1)式中的对应项决定:

$$(a.3.68) \quad [H(j\omega_r)] \approx \{\Psi\}_r \frac{1}{j\omega_r - \lambda_r} \langle L \rangle_r,$$

因为在 r 谱线附近重要的奇异值数目指明了线性无关的特征值数,即对频响函数矩阵的内容有重要贡献的模态数,所以在共振频率附近,频响函数矩阵就变成:

$$(a.3.69) \quad [H(j\omega_r)] \approx [P]_{r1} \cdot s_{r1} \cdot [R]_{r1}^{*T}.$$

其中, $r1$ 标明谱线 ω_r 处第一个(=最大)奇异值。

比较上面两个表达式说明,左奇异向量近似于模态向量,而右奇异向量近似于模态参预因子向量。因 CMIF 是一种多参考点算法,所以它能检测出多个根。在这些频率上,响应将主要由几个模态向量支配着。这表现为在此频率上有几个重要的奇异值达到峰值。CMIF 还可以分辨出数目不超过参考点数的重根。

下一步求系统极点和模态换算因子。首先利用共振频率点的左右奇异向量计算每一个模态 r 的增强频响函数 eH_r :

$$(a.3.70) \quad eH_r(j\omega) = \{p\}_{r1}^{*T} [H(j\omega)] \{R\}_{r1}$$

$$eH_r(j\omega) = \{P\}_{r1}^{*T} \left(\sum_{s=1}^N \left(\{\Psi\}_s \frac{1}{j\omega - \lambda_s} \langle L \rangle_s + \{\Psi\}_s^* \frac{1}{j\omega - \lambda_s^*} \langle L \rangle_s^* \right) \right) \{R\}_{r1},$$

或者,由于模态向量有正交倾向性(A.1.2.7节),又因 $\{p\}_{r1}$ 是模态向量 $\{\Psi\}_r$ 的估计,所以有下式成立:

$$(a.3.71) \quad eH_r(j\omega) \approx \{P_{r1}^*\}^T \{\Psi\}_r \frac{1}{j\omega - \lambda_r} \langle L \rangle_r \{R\}_{r1},$$

$$eH_r(j\omega) \approx \{P_{r1}^*\}^T \{\Psi\}_r \frac{Q_r}{j\omega - \lambda_r} \{\Psi\}_r \{R\}_{r1}$$

这是单自由度系统的描述。任何一种单自由度参数估计方法(例如圆拟合)都能给出系统极点 λ_r 和模态换算因子 Q_r 的估计。

A.3.6 结 论

本章讨论了实验模态分析的参数估计问题:从测量时域或频域数据开始,到估计系统的模态参数,即极点,振型,模态参预因子等等。作为进一步讨论若干单自由度方法和时、频域多自由度方法的入门,本章首先介绍了一些基本概念。

关于时域法和频域法哪个更好的问题,理论上并没有什么道理,但在实际应用上却有某些基本的差别。

● **数值考虑。**时域方法较之频域的对应方法在数值上更容易改善。这是因为,在频域方程中频率值是按频率的乘方上升的。数值考虑的另一个因素与系数矩阵的最小二乘估计中数据的隐含加权有关。这些加权函数在共振频率点达到它们的局部最小值,这对于频域算法来

说是比较糟糕的。由于这些原因,时域估计方法一般更适合于处理噪声大的数据。如果直接应用于原始时域数据,时域法可以使大部分信号处理误差(如泄漏、迭混、加窗等,见 A.2 章)得以避免。另一方面,在有噪声的测量条件下,频域平均更容易,更有效。

● **频率范围。**由于考虑到频域方法中频率乘方的影响,所以在进行宽带分析时最好采用时域法。在带外模态的影响比较重要的场合,频域法好一些,尤其是估计振型时,因为频域法能够逼近这些影响,而时域法无法补偿带外模态的影响。

● **阻尼。**大阻尼系统的共振峰在频响函数中呈现出宽胖的形状(即峰值分布在多条谱线上),但这种系统的脉冲响应持续时间却很短(即仅持续很少几个重要的时间采样,图 a.3.4.a)。因此,估计大阻尼系统的极点时,频域法较好。相反,估计小阻尼系统的极点时,时域法较好(图 a.3.4.b)。因此,频域法适合于 $\zeta > 3\%$ 的情形,而时域法适合于 $\zeta < 5\%$ 的情形。

● **测量数据的特性。**频响函数测得之后,用快速傅立叶反变换很容易把它们转化为时域数据(A.2 章),如果频率间隔是常数并且所选带宽含有的谱线数是 2 的幂次的话。这一过程可能引入一定的截断偏度误差(“逆泄漏”)。更有甚者,有些试验方法,如步进正弦激励,会出现频率间隔不等的频响函数。所以在这些情况中,全部时域分析方法都无法使用。

单自由度法的峰值检测和模态检测常用于快速浏览之目的。对于多参考点数据的多自由度法来说,多参考点最小二乘复指数法是估计系统极点和模态参预因子最常用的一种方法。这一方法还经常与线性最小二乘频域方法结合使用以估计模态振型。

B.4 章将给出更多有关这些方法的实际应用。在那里我们将讨论几种工具,以便估计在所选频带内有多少个模态,并就怎样正确选择频带和系统极点给出一些说明。

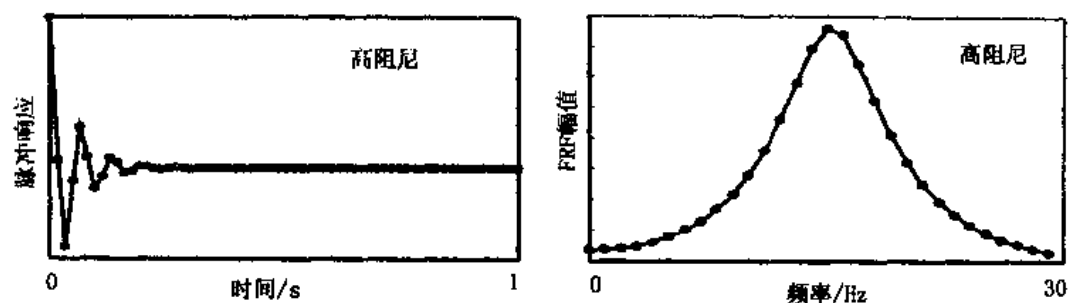


图 a.3.4.a 大阻尼;采样点数

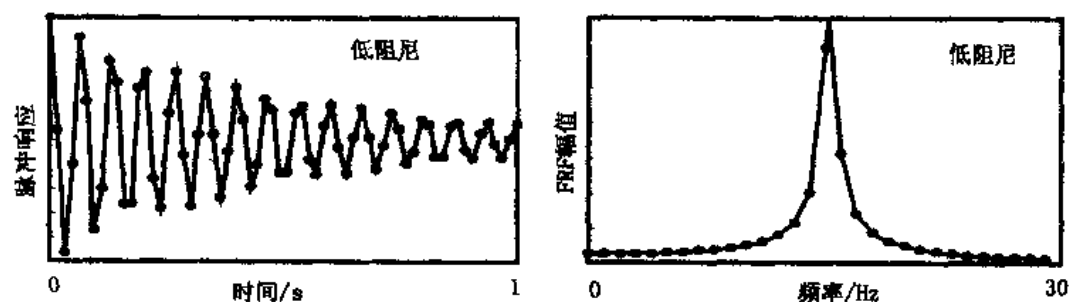


图 a.3.4.b 小阻尼;采样点数

A.4 章 模型验证

A.4.0 引言

模态模型验证是实验模态分析的第四步,它对第三步即模态参数估计(A.3 章)所得结果的正确性进行检验。为了对估计得到的模态模型的质量予以评估,或者从用各种不同的参数估计得出的模态数据中构造出尽可能好的模态模型,我们需要运用许多手段。模态模型验证可以按三种级别进行。第一级别相当直观,不涉及任何数学工具。对振型进行视觉检查,或把实测到的频响函数与从模态参数识别过程中计算(“综合”)出来的频响函数进行比较,这些都是这一级别模态模型验证的典型例子(见 B.4.2.1 节)。根据 A.1.2.5 节,综合频响函数如下:

$$\begin{aligned} (a.4.1) \quad [H(j\omega)] &= \sum_{r=1}^N \left(\frac{Q_r \{\Psi\}_r \{\Psi\}_r^T}{(j\omega - \lambda_r)} + \frac{Q_r^* \{\Psi\}_r^* \{\Psi\}_r^{*T}}{(j\omega - \lambda_r^*)} \right), \\ [H(j\omega)] &= \sum_{r=1}^N \left(\frac{\{\Psi\}_r \langle L \rangle_r}{(j\omega - \lambda_r)} + \frac{\{\Psi\}_r^* \langle L \rangle_r^*}{(j\omega - \lambda_r^*)} \right), \quad \text{或} \\ [H(j\omega)] &= \sum_{r=1}^N \left(\frac{[A]_r}{(j\omega - \lambda_r)} + \frac{[A]_r^*}{(j\omega - \lambda_r^*)} \right). \end{aligned}$$

式中 $[H(j\omega)]$: 频响函数矩阵;

λ_r : 第 r 阶模态的系统极点;

$\{\Psi\}_r$: 第 r 阶模态振型;

$\langle L \rangle_r$: 第 r 阶模态的模态参预因子向量;

$[A]_r$: 第 r 阶模态的留数矩阵;

Q_r : 第 r 阶模态的模态比例系数。

第二级验证是利用某些数学工具检验估计出来的模型的质量。后面几节将讨论诸如模态判定准则、模态参预、互易性、模态超复杂性、模态相位共线性、平均相位偏移、模态置信因子等这样的一些工具。第三级验证是一种隐含式验证:当模型用于灵敏度分析、结构变化效果预测、有限元模型修正等进一步分析时,这些分析的成功很大程度上决定于模态模型估计的正确性。

这里值得一提的是,实验模态分析过程还包括其他一些方面的验证:首先是测量设置(试件固定、校准、传感器信号等)的正确性必须验证,其次是测量得到的频响函数必须例如通过相干函数加以验证。

下篇 B.4 章将从更加实用的观点讨论所有这些验证方法。

A.4.1 模态比例因子(MSF)和模态判定准则(MAC)

模态比例因子(MSF)和模态判定准则(MAC)是用以比较两个向量的数学工具。假定

X 和 Y 是两个长度相同的向量, 那么模态比例因子 $MSF(X/Y)$ 和对应的模态判定准则 MAC_X 分别为(参考文献 a.4.1):

$$a.4.2) \quad MSF(X/Y) = \frac{|X|^* T [W] Y|}{|Y|^* T [W] Y|},$$

$$a.4.3) \quad MAC_{XY} = \frac{|X|^* T [W] Y|^2}{(|Y|^* T [W] Y|)(|X|^* T [W] X|)},$$

式中 $[W]$: 一个加权矩阵(常常是单位矩阵)。

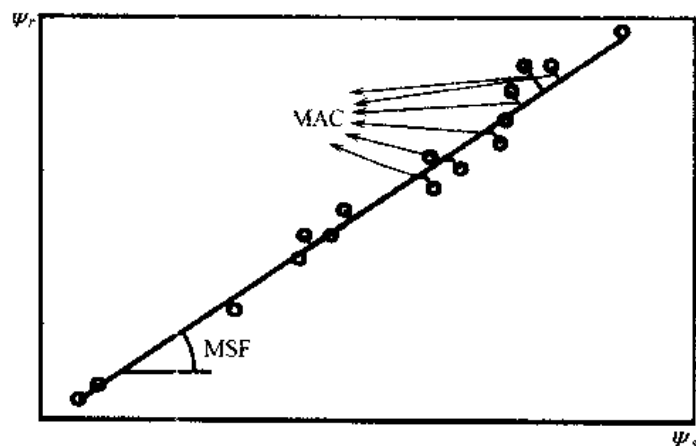


图 a.4.1 两个向量之间的 MSF 和 MAC

模态比例因子给出了两个向量之比的最小二乘估计, 模态判定准则则是对应的相关因子(图 a.4.1)。如果模态判定准则是 1, 则这两个向量在一个比例系数内, 即模态比例因子内, 是完全等同的。如果模态判定准则是零, 那么两个向量之间不存在线性关系, 估计出来的模态比例因子便失去意义。这个原理既可用做模态模型验证的一个工具, 也可当做检验所选模态向量估计法是否最好的一个标志。

假设对于某一模态 r 存在两个估计: k 和 l (如两种不同的参数估计尝试), 那么对应留数矩阵 $[A]_{r,k}$ 和 $[A]_{r,l}$ 的列向量应该相等。式(a.4.1)和 A.1.2.3 节已经证明了这一点。因此, 对于第 j 列(或激励自由度), 下面两式都应当等于 1:

$$a.4.4) \quad MSF(\{A\}_{r,k}/\{A\}_{r,l}) = \frac{\{A\}_{r,k}^* T \{A\}_{r,l}}{|\{A\}_{r,l}|^2} \quad \text{和}$$

$$a.4.5) \quad MAC(\{A\}_{r,k}, \{A\}_{r,l}) = \frac{|\{A\}_{r,k}^* T \{A\}_{r,l}|^2}{(|\{A\}_{r,l}|^2)(|\{A\}_{r,k}|^2)}.$$

同样, 比较同一个留数矩阵的两种估计的不同两列(即两个不同的激励自由度)也应当得到模态判定准则为 1, 得到的模态比例因子则取决于两个激励自由度的模态参预因子。

模态判定准则可以当做一个工具来比较不同组的估计振型, 或用以研究同一组中各估计模态的正确性。两个模态振型向量 $\{\Psi\}_r$ 和 $\{\Psi\}_s$ 之间的模态判定准则定义为:

$$a.4.6) \quad MAC(\{\Psi\}_r, \{\Psi\}_s) = \frac{|\{\Psi\}_r^* T \{\Psi\}_s|^2}{(|\{\Psi\}_r|^2)(|\{\Psi\}_s|^2)}.$$

如果 $\{\Psi\}_r$ 和 $\{\Psi\}_s$ 是同一个物理振型的估计, 那么模态判定准则应当接近 1。如果 $\{\Psi\}_r$ 和 $\{\Psi\}_s$ 是不同的物理振型的估计, 则模态判定准则应该很低。这后一点的根据是振型正交性

条件(A.1.2.7节)。假定我们考虑比例阻尼情况,则有:

$$(a.4.7) \quad [\Psi]^T [M] [\Psi] = [\lambda m_i] \text{ 和 } [\Psi]^T [K] [\Psi] = [\lambda k_i],$$

式中 $[\Psi] = \{[\Psi]_1 \cdots [\Psi]_N\}$;

$[M]$: 系统质量矩阵;

$[K]$: 系统刚度矩阵。

因此,在比例阻尼情况下,如果质量或刚度矩阵作为加权矩阵引入(a.4.6)式,那么不同模态之间的模态模态准则将是0。然而在实验模态分析中,质量矩阵是未知的,而且实际阻尼也往往不完全是比例阻尼。尽管如此,在实践中响应自由度常常均匀分布在结构上,所以它们各自代表的质量大致相等,相应的集中质量矩阵也就成了元素近似相等的对角矩阵。如果阻尼的非比例性对上面提到的正交条件影响很小,那么不同模态之间的模态判定准则也会很小(例如小于0.1)。这种效果因模态判定准则类似于正交性表达式的平方而得到加强。

B.4.2.2节将说明模态置信准则如何能够指明所测数据不符合可观测性条件(见A.1.0节)。

A.4.2 模态参预

模态参预(MP)是研究给定频段上各模态的相对重要性以及所选择的输入自由度之有效性的一个工具。表a.4.1是关于模态参预的概括,图a.4.2说明了其原理:

表 a.4.1 模态参预

	输入 1	...	输入 N_i	总(输入)
模态 1	$MP_{11} = \sum_{o=1}^{N_o} A_{o11} $		$MP_{N_i1} = \sum_{o=1}^{N_o} A_{oN_i1} $	$\sum_{i=1}^{N_i} MP_{i1}$
...				
模态 N_m	$MP_{1N_m} = \sum_{o=1}^{N_o} A_{o1N_m} $		$MP_{N_iN_m} = \sum_{o=1}^{N_o} A_{oN_iN_m} $	$\sum_{i=1}^{N_i} MP_{iN_m}$
总(模态)	$\sum_{r=1}^{N_m} MP_{1r}$		$\sum_{r=1}^{N_m} MP_{N_i r}$	
注: A_{or} : 输出 o 、输入 i 、模态 r 的留数; N_o : 输出自由度数; N_i : 输入自由度数; N_m : 模态数。				

MP_{ir} 项表示第 r 阶模态在自由度 i 激励所引起的总响应中所占有的分量。就不同自由度 i 比较这些 MP_{ir} 项即可看出,第 r 阶模态是怎样由各个激励点相对地激励出来的(上表各行)。表中“总(模态)”这一行表示不同激励自由度在总输出中的分布之估计。就不同模态比较这些 MP_{ir} 项,可以指明激励点 i 对哪个模态激励得最好(表中各列)。“总(输入)”这一列是各个模态在所有激励所引起的总响应中所占份额之估计。

这种信息可以帮助我们选择最有效的激励自由度,而且有助于对其他模态模型检验方法

的正确性进行评估(见 B.4.2.3 节)。

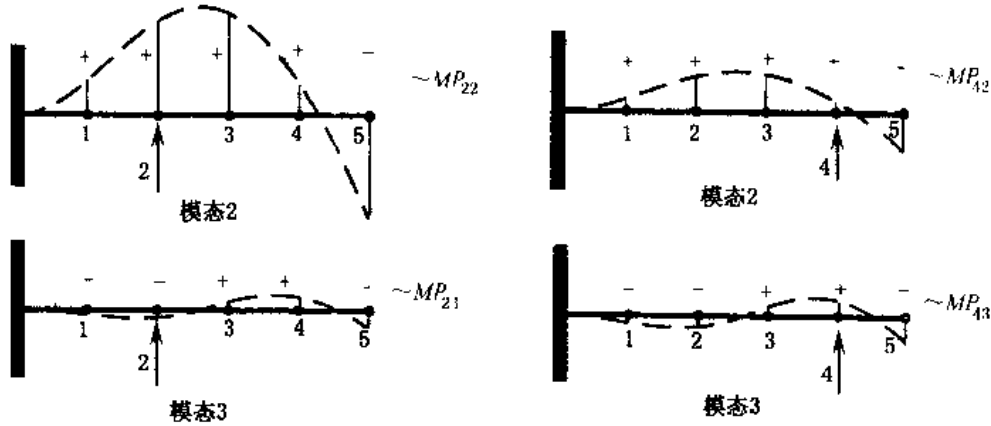


图 a.4.2 关于一简支梁的模态参预

A.4.3 互易性

正如 A.1.0 节所提到的,很多时候我们假设被研究的系统遵从 Maxwell 互易性原理:输出点 p 对输入点 q 的响应等于 q 点对 p 点相同输入的响应。由于这一假定,质量、刚度、阻尼、频响函数等矩阵都成了对称矩阵。

如果来自若干输入点的测量数据可资利用,那么互易性条件可以在实测的频响函数级别进行检查: $H_{pq}(j\omega) = H_{qp}(j\omega)$ 。

在模态模型级,就 p 点和 q 点对(a.4.1)式进行计算,并应用互易性原理于第 r 阶模态,即可证明:

$$(a.4.8) \quad A_{pqr} = A_{qpr},$$

$$(a.4.9) \quad \Psi_{pr} L_{rq} = \Psi_{qr} L_{rp},$$

$$(a.4.10) \quad \frac{L_{rq}}{\Psi_{qr}} = \frac{L_{rp}}{\Psi_{pr}}$$

因此,对于一个互易系统,模态参预因子与输入点的模态振型系数成正比。

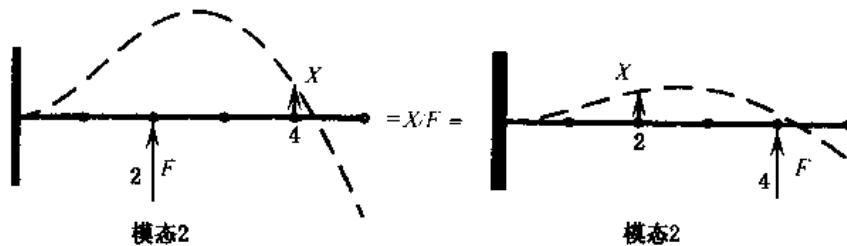


图 a.4.3 关于一个简支梁的互易性

如果多输入数据可用,而且用某种参数估计算法独立地估计模态振型和模态参预因子,这时可以用(a.4.10)式检验互易性假设是否正确。

A.4.4 模态复杂性

在一个测量点给结构附加一个质量将会降低各阶模态的阻尼固有频率(见 A.1.1.6 节)。这个原理构成了模态复杂性检验的基础。A.5.2.2 节将证明,系统极点的灵敏度可以从模态参数的计算得到。阻尼固有频率 ω_r 对 m 点的质量增量 ΔM_m 的灵敏度为:

$$(a.4.11) \quad \frac{\partial \omega_r}{\partial M_m} = \operatorname{Im} \left(\frac{\partial \lambda_r}{\partial M_m} \right) = \operatorname{Im}(-\lambda_r^2 \Psi_{mr}^2 Q_r) = \operatorname{Im}(-\lambda_r^2 \Psi_{mr} L_{rm}).$$

关于某一阶模态 r 的模态超复杂性值(MOV)定义为频率灵敏度为负值的响应自由度所占的(加权)百分比(参考文献 a.4.2):

$$(a.4.12) \quad \operatorname{MOV}_r = \frac{\sum_{o=1}^N w_o s_{or}}{\sum_{o=1}^N w_o} \times 100\%,$$

式中 w_o : 加权系数(例如取 $w_o = 1$, 或 $w_o = |\Psi_{or}|^2$);

$$s_{or} \begin{cases} = 1, & \text{如果第 } r \text{ 阶模态对点 } o \text{ 的质量增加的频率灵敏度} \leq 0; \\ = 0, & \text{如果第 } r \text{ 阶模态对点 } o \text{ 的质量增加的频率灵敏度} > 0. \end{cases}$$

物理模态的超复杂性值应当是 1。模态超复杂性的值低,表明此模态是个噪声模态或计算模态。这样的模态在估计过程中可能出现,因为它们企图把测量数据中的噪声也模型化。

B.4.2.4 节将对实际试验情况下 MOV 的意义给予解释。

A.4.5 模态相位共线性和平均相位偏移

比例阻尼系统的模态振型是“纯”模态(A.1.2.6 节);对某一具体模态的各振型系数来说,相位都是固定的。适当比例换算后,模态振型系数的相位或者是 0° , 或者是 180° 。模态相位共线性(MPC)是一个检查某阶模态的复杂性程度的一个指标,它计算模态振型系数的实、虚部之间的函数线性关系。参考文献 a.4.3 就差不多是实值的纯模态给出了模态相位共线性的定义。对每一个模态振型 r , 从各元素中减去所有元素的平均复数值,可算出一个向量:

$$(a.4.13) \quad \tilde{\Psi}_{ir} = \Psi_{ir} - \frac{\sum_{i=1}^{N_o} \Psi_{or}}{N_o} \quad (i = 1, 2, \dots, N_o).$$

利用下面的方程:

$$(a.4.14) \quad \epsilon = \frac{\|\operatorname{Im}\{\tilde{\Psi}\}_r\|^2 - \|\operatorname{Re}\{\tilde{\Psi}\}_r\|^2}{2(\operatorname{Re}\{\tilde{\Psi}\}_r^T \operatorname{Im}\{\tilde{\Psi}\}_r)} \quad \text{和}$$

$$\theta = \arctan(|\epsilon| + \operatorname{sign}(\epsilon) \sqrt{1 + \epsilon^2}),$$

便可计算模态相位共线性:

$$(a.4.15) \quad \operatorname{MPC}_r = \frac{\|\operatorname{Re}\{\tilde{\Psi}\}_r\|^2 + (\operatorname{Re}\{\tilde{\Psi}\}_r^T \operatorname{Im}\{\tilde{\Psi}\}_r)(2(\epsilon^2 + 1)\sin^2\theta - 1)/\epsilon}{\|\operatorname{Re}\{\tilde{\Psi}\}_r\|^2 + \|\operatorname{Im}\{\tilde{\Psi}\}_r\|^2}.$$

对于实模态,上面这个指标接近于 1;小于 1 则表示模态比较复杂,说明在我们本指望基

本上是纯模态的(例如比例阻尼或小阻尼)情况中存在着计算模态或噪声模态。为了使这种方法能用于具有任意相位的模态,首先要把模态向量系数绕着该向量的平均相位加以旋转。

平均相位偏移(MPD)是模态振型复杂性的另一个统计指标。模态 r 的平均相位是:

$$(a.4.16) \quad MPH_r = \frac{\sum_{o=1}^{N_o} w_o \varphi_{or}}{\sum_{o=1}^{N_o} w_o},$$

其中 w_o : 加权系数(如 $=1$ 或 $=|\Psi_{or}|$),

$$\varphi_{or} \begin{cases} = \arctan(\operatorname{Re}(\Psi_{or})/\operatorname{Im}(\Psi_{or})), & \text{如果 } \arctan(\operatorname{Re}(\Psi_{or})/\operatorname{Im}(\Psi_{or})) \geq 0; \\ = \arctan(\operatorname{Re}(\Psi_{or})/\operatorname{Im}(\Psi_{or})) + \pi, & \text{如果 } \arctan(\operatorname{Re}(\Psi_{or})/\operatorname{Im}(\Psi_{or})) < 0. \end{cases}$$

相应的平均相位偏移是:

$$(a.4.17) \quad MPD_r = \sqrt{\frac{\sum_{o=1}^{N_o} w_o (\varphi_{or} - MPH_r)^2}{\sum_{o=1}^{N_o} w_o}}.$$

模态相位偏移表示每个模态振型的相位散布情况;对于纯模态它的值应当是 0。

B.4.2.4 节将就一实际试验对 MPC 和 MPD 加以说明。

A.4.6 模态置信因子

在 Ibrahim 时域参数估计法(A.3.4.1 节)中, Ibrahim 通过虚拟测量引入了模态置信因子的概念(参考文献 a.4.4)。虚拟测量实际上是延迟了的物理时间信号。模态模型的时域描述是(见 A.1.2.5 节):

$$(a.4.18) \quad [h(t)] = [V] \begin{bmatrix} \backslash e^{\Lambda t} \backslash \end{bmatrix} [L],$$

式中 $[h(t)]$: 脉冲响应函数矩阵;

$[V] = [|\Psi\rangle_1 \cdots |\Psi\rangle_N |\Psi\rangle_1^* \cdots |\Psi\rangle_N^*]$, 是模态向量矩阵;

$\begin{bmatrix} \backslash \Lambda \backslash \end{bmatrix}$: 系统极点对角矩阵;

$[L] = \begin{bmatrix} \backslash Q \backslash \end{bmatrix} [V]^T$: 模态参预因子矩阵。

延迟的脉冲响应函数矩阵是:

$$(a.4.19) \quad \begin{aligned} [h(t + \Delta\tau)] &= [V] \begin{bmatrix} \backslash e^{\Lambda(t+\Delta\tau)} \backslash \end{bmatrix} [L] \\ &= [V] \begin{bmatrix} \backslash e^{\Lambda\Delta\tau} \backslash \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \backslash e^{\Lambda t} \backslash \end{bmatrix} [L] \end{aligned}$$

将这些虚拟测量也引入识别过程,便得到一种扩展的模态振型向量:

$$(a.4.20) \quad \begin{bmatrix} V \\ \tilde{V} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V \\ V \begin{bmatrix} \backslash e^{\Lambda\Delta\tau} \backslash \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

因此,每一个物理模态都符合下式:

$$(a.4.21) \quad [\tilde{\Psi}]_r = |\Psi\rangle_r e^{\lambda_r \Delta\tau}.$$

但是,把测量数据中的噪声也变为模型的计算模态一般不满足上式。因此,模态置信因子(MCF)

$$(a.4.22) \quad MCF_r = \frac{\{\Psi\}_r^T \{\tilde{\Psi}\}_r}{\{\Psi\}_r^T \{\Psi\}_r} e^{-\lambda_r \Delta \tau}$$

对于物理模态应当是 1,而对于计算出来的“噪声”模态远不是 1。

这个方法已经推广到了多参考点最小二乘复指数法(LSCE,见 A.3.4.2 节)。该方法的主要缺点是数据量成倍加大,出现很大的方程组和特征值问题需要去解。这一方法应用在 LSCE 中,可能对识别过程本身产生负面影响(参考文献 a.4.5)。

A.4.7 频响函数综合

知道了模态参数,就可以根据(a.4.1)式计算任意两个测量自由度之间的频响函数。因此,将综合得到的频响函数与原本测量得到的频响函数加以比较,即可对估计出来的模态模型的正确性进行检查。为了进行这样的比较,我们可以定义一个类似于模态判定准则((a.4.3)式)那样的相关系数。假设 $\{H\}$ 和 $\{\hat{H}\}$ 分别代表实测频响函数向量和综合频响函数向量,二者之间的相关系数为:

$$(a.4.23) \quad MAC_{HH} = \frac{1 \{H\}^* T [W] \{\hat{H}\}}{(\{H\}^* T [W] \{H\}) (\{\hat{H}\}^* T [W] \{\hat{H}\})},$$

式中 $\{H\}$: 实测频响函数样本 $H(\omega_f)$ 构成的向量, $f = 1, 2, \dots, N_f$;

$\{\hat{H}\}$: 综合频响函数样本向量。

还有一种更为复杂的比较频响函数的方法,将在 A.6.1.3.7 节给以解释。

A.4.8 结 论

本章叙述了实验模态分析的第四个步骤,即模态模型验证。其中给出了一套数学工具,可用以判别估计出来的模态模型的价值、可靠性和正确性,或从不同的估计中选择最好的一种估计。然而所有这些工具中,没有哪个可以对一个模态模型的质量提供坚不可摧的保证。在模态分析过程中,分析家的洞察力和经验仍然是决定因素。此阶段得到的结果对利用模态模型做进一步分析,如灵敏度分析、结构修改(A.5 章)、有限元模型修正(A.6 章)等,将具有重大影响。

A.5 章 模态参数的应用

A.5.0 引言

一旦知道了模态参数(共振频率, 阻尼系数, 模态向量, 模态参预因子)并给予了验证(A.4章), 我们便可以利用这些参数对系统的动态特性进行更透彻的研究。我们也可以把这些参数用于(重)设计过程, 优化系统动态特性, 或者研究把该结构连接到其他结构上时所产生的影响。本章将讨论用于上述目的的一些数学工具, 其中大部分涉及模态模型的应用

如果分析者对系统在某些特定点(例如实际工作条件)施加特定输入力时的动态特性感兴趣, 请参考强迫响应分析(A.5.1节)。

设计师想修改当前的结构时, 可能关心他所做的修改对于系统的动态特性有何影响。灵敏度分析(A.5.2节)可以粗略地告诉他, 对于他的修改, 哪些共振频率和/或哪些模态振型的改变最为明显。相反, 如果他的兴趣在于移动一些特定的共振频率, 那么灵敏度分析将会告诉他在哪些点施行修改最有希望达到目的。A.5.3节讨论的是关于结构动力学修改与集成的若干方法, 从中可以获得与上类似的信息, 但更精确。而且这些方法可以计算由动态特性已知的子结构集合而成的结构的动态特性。

许多方法将采用下面的模态模型的基本方程, 这些方程借助模态参数描述频响函数(A.1.2.5节):

$$\begin{aligned} (a.5.1) \quad [H(j\omega)] &= \sum_{r=1}^N \left(\frac{Q_r \{\Psi\}_r \{\Psi\}_r^T}{(j\omega - \lambda_r)} + \frac{Q_r^* \{\Psi\}_r^* \{\Psi\}_r^{*T}}{(j\omega - \lambda_r^*)} \right), \\ [H(j\omega)] &= \sum_{r=1}^N \left(\frac{\{\Psi\}_r \langle L \rangle_r}{(j\omega - \lambda_r)} + \frac{\{\Psi\}_r^* \langle L \rangle_r^*}{(j\omega - \lambda_r^*)} \right), \quad \text{或} \\ [H(j\omega)] &= \sum_{r=1}^N \left(\frac{[A]_r}{(j\omega - \lambda_r)} + \frac{[A]_r^*}{(j\omega - \lambda_r^*)} \right). \end{aligned}$$

式中 $[H(j\omega)]$: 频响函数矩阵;

λ_r : 第 r 阶模态的系统极点;

$\{\Psi\}_r$: 第 r 阶模态振型;

$\langle L \rangle_r$: 第 r 阶模态的模态参预因子向量;

$[A]_r$: 第 r 阶模态的留数矩阵;

Q_r : 第 r 阶模态的模态比例因子。

应当明确, 后面我们所介绍的那些方法的精度很大程度上取决于模态模型的精度和完整性。这一模态模型的参数来自于实际测量, 或来自于解析模型估计, 因此测量的精度或解析估计的精度具有非常重要的意义。

A.5.1 强迫响应分析

A.5.1.1 引言

工程师们的兴趣经常在于结构对作用力(如在工作条件下)的反应如何,而不在于模态特性本身,因为他们常要回答下面这样一些典型的设计问题:在正常载荷条件下或在极端载荷条件下一些特定点的最大加速度是多少?哪些共振频率支配着结构的响应?在某一频率下结构是怎样变形的?

强迫响应分析便是根据已知模态参数回答此类问题的得力工具(图 a.5.1)。

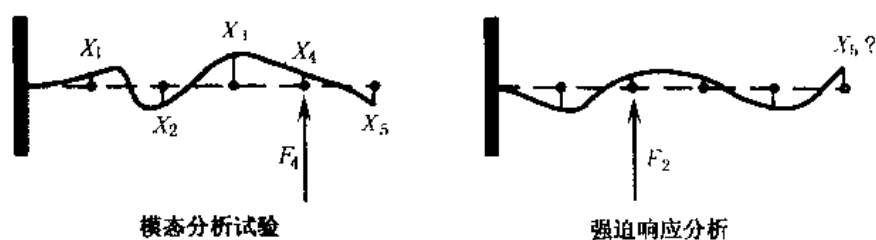


图 a.5.1 悬臂梁的强迫响应分析

A.5.1.2 理论

A.1.2.5 节说过,频响函数矩阵 $[H(\omega)]$ 把作为频率函数的系统输出位移 $\{X(\omega)\}$ 和输入力 $\{F(\omega)\}$ 联系起来:

$$(a.5.2) \quad \{X(\omega)\} = [H(\omega)]\{F(\omega)\}.$$

在此方程中,频响函数矩阵用模态参数表示(见(a.5.1)式)。因此,如果输入力已知,由上面的方程可求得全部自由度的响应。显然,如果只对某些特定的响应有兴趣,那么只计算这些特定响应的值就够了。

看来这里有两个问题:一是频响函数矩阵测得不完整,二是频响函数的值只在有限的频带上已知。

一般,只能测出频响函数矩阵的 1 列至 4 列,就是说试验只有 1 至 4 个激励自由度。然而 A.1.2.3 节已经指出,一列(或一行)就包含了构成整个频响函数矩阵的足够多的信息(除非这一列恰巧与零模态系数相吻合)。假定由测量已得出第 j 列,又假定自由度 x 对输入自由度 y 的响应具有特殊的重要性,那么根据方程(a.5.1)和(a.5.2)可以得出:

$$(a.5.3) \quad X_x(\omega) = \left(\sum_{r=1}^N \left(\frac{A_{xyr}}{(j\omega - \lambda_r)} + \frac{A_{xyr}^*}{(j\omega - \lambda_r^*)} \right) \right) F_y(\omega).$$

留数 A_{xyr} 不是测出来的,但可以借助模态比例因子和模态位移表示成 $A_{xyr} = Q_r \Psi_{xr} \Psi_{yr}$, 也可以用实测出来的留数 A_{xjr} 、 A_{yjr} 和 A_{jjr} 来表示: $A_{xyr} = \frac{A_{xjr} A_{yjr}}{A_{jjr}}$ 。应当指出,模态的比例因子必须正确。

另一个问题来自实验模态参数估计频带之外的那些模态所引起的带外效应。有些参数识别方法,比如频域法(A.3.5 节),通过引入上剩余项和下剩余项进行参数估计时,可以补偿带

外效应。但由于上、下剩余项不能对于别的参考点进行正确换算,故而不能用在强迫响应计算中。因此,我们极力主张采用比较大的模态模型,要包括感兴趣的频率范围上下的一些模态在内。

精度差的另一个可能原因是在所考虑的频率范围内模态模型不完整,因此试验者要确保该频率范围内的全部模态都能在测量中被激励出来。尤其在单点激励情况下,如果激励位置刚好处于这些模态的一个节点上,那么就可能漏掉一个或几个模态。

A.5.1.3 应用方面

强迫响应分析主要用以研究处于工作条件下的结构的特性,如行驶的汽车、转动的引擎、发射时的卫星等。按照这种方法可以就过载区域或者疲劳问题对系统进行检测。傅立叶变换使对这些现象的研究既可在频域进行,也可在时域进行。

A.5.2 灵敏度分析

A.5.2.1 引言

灵敏度分析是在泰勒展开式的基础上用以确定模态参数对质量、阻尼或刚度的变化率的一种方法。因为估计这种变化率时只用到级数展开式的一项或两项,所以灵敏度分析是一种近似方法(图 a.5.2)。

灵敏度分析对于确定在哪个部位进行某种形式的结构修改最为有效是很有用的。灵敏度分析还能初步估计为实现所期望的动态特性之改变而需要的修正量。

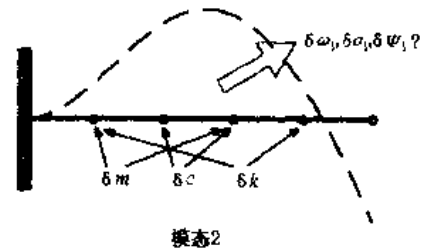


图 a.5.2 对悬臂梁第二阶模态进行灵敏度分析

A.5.2.2 理论

下面的理论推导是参考文献 a.5.1 中所描述的关于无阻尼系统方法的扩展。A.1.2.1 节已经解释过,一个阻尼系统的(拉氏域)系统方程

$$(a.5.4) \quad (p^2[M] + p[C] + [K])\{X(p)\} = [Z(p)]\{X(p)\} = \{F(p)\},$$

式中 $[M]$:质量矩阵;

$[C]$:阻尼矩阵;

$[K]$:刚度矩阵;

$[Z(p)]$:动态刚度矩阵;

$\{F(p)\}$:力向量;

$\{X(p)\}$:响应向量。

转换成扩展系统方程为:

$$(a.5.5) \quad (p[A] + [B])\{Y\} = \{F'\},$$

$$\text{式中 } [A] = \begin{bmatrix} [0] & [M] \\ [M] & [C] \end{bmatrix}, [B] = \begin{bmatrix} -[M] & [0] \\ [0] & [K] \end{bmatrix},$$

$$\{Y\} = \begin{Bmatrix} p\{X\} \\ \{X\} \end{Bmatrix}, \quad \{F'\} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{F\} \end{Bmatrix}.$$

从相应的特征值问题

$$(a.5.6) \quad (p[A] + [B])\{y\} = \{0\}$$

可以求得 N 个特征值(或系统极点) $\lambda_i = \sigma_i + j\omega_i$ 及其共轭复数。将这些特征值集成一个对角矩阵 $[\Lambda]$, 对应特征向量 $\{\Phi\}_i = \begin{Bmatrix} \lambda_i \{\Psi\}_i \\ \{\Psi\}_i \end{Bmatrix}$ 集成模态向量矩阵 $[\Phi]$ 。A.1.2.7 节讨论了正交条件, 从而定义了模态 a 和模态 b :

$$(a.5.7) \quad [\Phi]^T [A] [\Phi] = [\Lambda], \quad [\Phi]^T [B] [\Phi] = [b],$$

$$\text{式中 } [b] = -[\Lambda][\Lambda].$$

现就第 i 个特征值来考虑特征值问题方程:

$$(a.5.8) \quad (\lambda_i [A] + [B])\{\Phi\}_i = \{0\}.$$

以下的推导目的是要找到特征值和特征向量对模态参数(u)的偏导数的表达式 $\frac{\partial \lambda_i}{\partial u}$ 和 $\frac{\partial \{\Phi\}_i}{\partial u}$.

以 $\{\Phi\}_i^T$ 左乘(a.5.8)式两端, 得

$$(a.5.9) \quad \{\Phi\}_i^T (\lambda_i [A] + [B])\{\Phi\}_i = 0.$$

上式对 u 求导, 得

$$(a.5.10) \quad \frac{\partial \{\Phi\}_i^T}{\partial u} (\lambda_i [A] + [B])\{\Phi\}_i + \{\Phi\}_i^T \frac{\partial (\lambda_i [A] + [B])}{\partial u} \{\Phi\}_i + \{\Phi\}_i^T (\lambda_i [A] + [B]) \frac{\partial \{\Phi\}_i}{\partial u} = 0.$$

考虑到(a.5.8)式, 上面的方程可简化为:

$$(a.5.11) \quad \{\Phi\}_i^T \frac{\partial (\lambda_i [A] + [B])}{\partial u} \{\Phi\}_i = 0 \text{ 或}$$

$$(a.5.12) \quad \{\Phi\}_i^T \left(\frac{\partial \lambda_i}{\partial u} [A] + \lambda_i \frac{\partial [A]}{\partial u} + \frac{\partial [B]}{\partial u} \right) \{\Phi\}_i = 0.$$

考虑到正交条件(a.5.7)式, 第 i 个系统极点对参数 u 变化的灵敏度为:

$$(a.5.13) \quad \frac{\partial \lambda_i}{\partial u} = -\frac{1}{a_i} \{\Phi\}_i^T \left(\lambda_i \frac{\partial [A]}{\partial u} + \frac{\partial [B]}{\partial u} \right) \{\Phi\}_i.$$

因为这些特征向量构成 $2N \times 2N$ 维向量空间的一组基, 所以第 i 个特征向量对参数 u 的偏导数就是这些特征向量的一个线性组合:

$$(a.5.14) \quad \frac{\partial \{\Phi\}_i}{\partial u} = \sum_{r=1}^{2N} g_{ir} \{\Phi\}_r,$$

其中后 N 个特征向量是前 N 个特征向量的共轭复数。知道了系数 g_{ir} , 就可以计算模态振型的灵敏度。取(a.5.8)式的导数并与上面的方程相结合, 得:

$$(a.5.15) \quad (\lambda_i [A] + [B]) \left(\sum_{r=1}^{2N} g_{ir} \{\Phi\}_r \right) + \frac{\partial (\lambda_i [A] + [B])}{\partial u} \{\Phi\}_i = 0.$$

用 $\{\Phi\}_m^T$ 左乘上式两端, 并考虑到正交条件(a.5.7)式, 则可以求出系数 g_{im} (这里 $i \neq m$):

$$(a.5.16) \quad g_{im} \{\Phi\}_m^T (\lambda_i [A] + [B])\{\Phi\}_i = -\{\Phi\}_m^T \frac{\partial (\lambda_i [A] + [B])}{\partial u} \{\Phi\}_i,$$

$$(a.5.17) \quad g_{im} a_m (\lambda_i - \lambda_m) = - \{ \Phi \}_i^T \left(\frac{\partial \lambda_i}{\partial u} [A] + \lambda_i \frac{\partial [A]}{\partial u} + \frac{\partial [B]}{\partial u} \right) \{ \Phi \}_i,$$

$$(a.5.18) \quad g_{im} = \frac{1}{\lambda_m - \lambda_i} \frac{1}{a_m} \{ \Phi \}_i^T \left(\lambda_i \frac{\partial [A]}{\partial u} + \frac{\partial [B]}{\partial u} \right) \{ \Phi \}_i.$$

根据矩阵 $[A]$ 的正交条件(a.5.7)式的导数,可求出系数 g_{ii} :

$$(a.5.19) \quad \frac{\partial \{ \Phi \}_i^T}{\partial u} [A] \{ \Phi \}_i + \{ \Phi \}_i^T \frac{\partial [A]}{\partial u} \{ \Phi \}_i + \{ \Phi \}_i^T [A] \frac{\partial \{ \Phi \}_i}{\partial u} = 0,$$

将(a.5.14)式代入上式,有

$$(a.5.20) \quad + 2 \{ \Phi \}_i^T [A] \sum_{r=1}^{2N} g_{ir} \{ \Phi \}_r = - \{ \Phi \}_i^T \frac{\partial [A]}{\partial u} \{ \Phi \}_i.$$

因有正交条件,上式成为:

$$(a.5.21) \quad g_{ii} = - \frac{1}{2a_i} \{ \Phi \}_i^T \frac{\partial [A]}{\partial u} \{ \Phi \}_i.$$

将(a.5.14)、(a.5.18)和(a.5.21)式结合起来,便最终得到模态振型灵敏度:

$$(a.5.22) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \{ \Phi \}_i}{\partial u} = & - \frac{1}{2a_i} \{ \Phi \}_i^T \frac{\partial [A]}{\partial u} \{ \Phi \}_i \{ \Phi \}_i + \\ & \sum_{r=1, r \neq i}^{2N} \frac{1}{\lambda_r - \lambda_i} \frac{1}{a_r} \{ \Phi \}_r^T \left(\lambda_r \frac{\partial [A]}{\partial u} + \frac{\partial [B]}{\partial u} \right) \{ \Phi \}_i \{ \Phi \}_r. \end{aligned}$$

借助非扩展的模态振型向量 $\{ \Psi \}_i$ 和质量、阻尼、刚度矩阵,方程(a.5.13)和(a.5.22)式可以写成:

$$(a.5.23) \quad \frac{\partial \lambda_i}{\partial u} = - \frac{1}{a_i} \{ \Psi \}_i^T \left(\lambda_i^2 \frac{\partial [M]}{\partial u} + \lambda_i \frac{\partial [C]}{\partial u} + \frac{\partial [K]}{\partial u} \right) \{ \Psi \}_i,$$

$$(a.5.24) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \{ \Psi \}_i}{\partial u} = & - \frac{1}{2a_i} \{ \Psi \}_i^T \left(2\lambda_i \frac{\partial [M]}{\partial u} + \frac{\partial [C]}{\partial u} \right) \{ \Psi \}_i \{ \Psi \}_i + \\ & \sum_{r=1, r \neq i}^{2N} \frac{1}{\lambda_r - \lambda_i} \frac{1}{a_r} \{ \Psi \}_r^T \left(\lambda_i^2 \frac{\partial [M]}{\partial u} + \lambda_i \frac{\partial [C]}{\partial u} + \frac{\partial [K]}{\partial u} \right) \{ \Psi \}_i \{ \Psi \}_r, \end{aligned}$$

对于诸如局部质量改变、两个自由度之间的线性弹簧刚度的改变、或两个自由度之间的线性粘性阻尼的改变等这类简单变化,实际的质量、刚度和阻尼矩阵一定是未知的:

● 若参数 u 表示自由度 k 的局部质量,则

$$(a.5.25) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \lambda_i}{\partial m_k} = & - \lambda_i^2 \frac{\Psi_{ki}^2}{a_i}, \\ \frac{\partial \Psi_{ji}}{\partial m_k} = & - \lambda_i \frac{\Psi_{ki}^2}{a_i} \Psi_{ji} + \Psi_{ki} \sum_{r=1, r \neq i}^{2N} \frac{\lambda_i^2}{\lambda_r - \lambda_i} \frac{\Psi_{kr} \Psi_{jr}}{a_r} \end{aligned}$$

● 若参数 u 表示自由度 k 和 l 之间的线性粘性阻尼,则有:

$$(a.5.26) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \lambda_i}{\partial c_{kl}} = & - \lambda_i \frac{(\Psi_{ki} - \Psi_{li})^2}{a_i}, \\ \frac{\partial \Psi_{ji}}{\partial c_{kl}} = & - \frac{1}{2} \frac{(\Psi_{ki} - \Psi_{li})^2}{a_i} \Psi_{ji} + \\ & (\Psi_{ki} - \Psi_{li}) \sum_{r=1, r \neq i}^{2N} \frac{\lambda_i}{\lambda_r - \lambda_i} \frac{(\Psi_{kr} - \Psi_{lr}) \Psi_{jr}}{a_r} \end{aligned}$$

● 若参数 u 表示自由度 k 和 l 之间的线性刚度, 那么有:

$$(a.5.27) \quad \frac{\partial \lambda_i}{\partial k_{kl}} = - \frac{(\Psi_{ki} - \Psi_{li})^2}{a_i},$$

$$\frac{\partial \Psi_{ji}}{\partial k_{kl}} = (\Psi_{ki} - \Psi_{li}) \sum_{r=1, r \neq i}^N \frac{1}{\lambda_r - \lambda_i} \frac{(\Psi_{kr} - \Psi_{lr}) \Psi_{jr}}{a_r}.$$

Vanhonacker(参考文献 a.5.2)和 De Landsgeer(参考文献 a.5.3)用不同的方法得出了同样的公式(Allemang 等人在参考文献 a.5.4 中对这些公式进行了讨论),他们都证明了怎样计算二阶偏导数项。根据 Taylor 展开式中的两个偏导数项可以估计“有限差分”灵敏度。

在计算系统的极点 λ_i 的灵敏度时,只需要相对应的模态振型向量(式(a.5.23))。注意到这一点是重要的。但欲求模态振型的灵敏度,则需要知道所有模态(a.5.24 式)。一般说来,可用的模态模型只包含有限数目的模态,因此模态振型灵敏度精度较差。

由于计算有限差分灵敏度时也需要知道全部模态,因此有限差分灵敏度并不总能给出更准确的预测,加之计算耗费精力很大,所以有限差分灵敏度很少用。

因为灵敏度分析提供的仅仅是一阶近似值,所以它的预测只对于小变化是准确的。此外,模态靠得很近也会引起精度问题。影响精度的另一个重要方面在于这样的事实:分析结果顶多只能像计算中所用的模态参数那样好。当利用测量数据进行处理时,可能由于测得的模态数不够多、旋转自由度未予考虑、测量的精度差、模态参数估计方法的限制等,灵敏度分析的精度会受到影响;当利用来自解析模型的数据时,计算的模态数少、自由度数有限、建模的不确定性、缺少阻尼估计等等因素,也会影响灵敏度分析的精度。

在某些特殊(例如与有限元模型有关的)应用中,无阻尼系统的灵敏度很重要。如果考虑到模态质量 m_r 和模态 a_r 的关系 $a_r = j2m_r\omega_r$ (见 A.1.2.8 节),以及 $\{\Psi\}_r, \{\Psi\}_r^T/a_r$ 这个量是个纯虚数(A.1.2.6 节),则根据一般粘性阻尼系统的公式,如(a.5.23)和(a.5.24)式,我们很容易得出无阻尼系统灵敏度:

$$(a.5.28) \quad \frac{\partial \omega_i}{\partial u} = \frac{1}{2m_i} \{\Psi\}_i^T \left(-\omega_i \frac{\partial [M]}{\partial u} + \frac{1}{\omega_i} \frac{\partial [K]}{\partial u} \right) \{\Psi\}_i,$$

$$(a.5.29) \quad \frac{\partial \{\Psi\}_i}{\partial u} = -\frac{1}{2m_i} \{\Psi\}_i^T \frac{\partial [M]}{\partial u} \{\Psi\}_i \{\Psi\}_i +$$

$$\sum_{r=1, r \neq i}^N \frac{1}{\omega_i^2 - \omega_r^2} \frac{1}{m_r} \{\Psi\}_r^T \left(-\omega_i^2 \frac{\partial [M]}{\partial u} + \frac{\partial [K]}{\partial u} \right) \{\Psi\}_i \{\Psi\}_r.$$

A.5.2.3 应用领域

尽管灵敏度分析在精度上有些缺陷,但是它在许多方面还是非常有用的。例如它作为一个预处理过程,一般可用于有限元建模、结构动力学修改与结构集成或结构的再设计,可作为模型修正过程的一个必要部分,还可作为模态模型验证的一部分,以补偿因移动加速度计而产生的附加质量影响。灵敏度计算是快速而稳定的,因此可为检验和(或)设计目的提供很多信息。

如果样机不满足要求,就必须对它加以修改。在设计或再设计过程中,灵敏度分析是首选的快速而有用的工具。它将给出修改对结构动态特性有何效果的初步概念,给出为实现给定的特性而需要进行什么样的修改、在何处修改最好的有关信息。在此过程中,它将比较各种不

同的修改方案。下一步(结构动力学修改)可对最有希望的修改之效果予以估计,然后就是实现最佳修改;首先,如果可以,则在有限元模型中进行,而后对实物样机本身进行硬件修改。

许多利用灵敏度分析的模型修正技术是一种迭代过程(见 A.6.6.3 节),根据实验获得的动态数据来调整有限元模型使之与测量数据相一致,其中有些是直接应用上述那些方程。最常估计的量是 $\partial[M]/\partial u$ 和 $\partial[K]/\partial u$,给参数 u 一个小增量 Δu ,将 Δu 代入有限元模型,计算对应的质量和刚度小变化量 $\Delta[M]$ 与 $\Delta[K]$ 。

作为模态模型验证的一个工具,A.4.4 节讨论了模态超复杂性。这个工具使用共振频率对质量变化的灵敏度来评估某一模态振型的超复杂性程度。在物理意义上,这些灵敏度不会是正的,因为附加一个质量决不会使共振频率增加。

在较轻结构的试验过程中,移动加速度计而引起的质量分布的变化可能会使共振频率有小的偏移。这些小偏移会使频响函数数据库产生不一致;不同点的频响函数表现出不同的共振频率。这一现象对于多自由度参数估计法(A.3.4 节和 A.3.5 节)可能会带来一些问题。单自由度方法(A.3.3 节)就不同的频响函数进行估计将得到不同的共振频率。然而,这些数据可用来计算频率灵敏度。适当以加速度计质量乘以这些数据可以对共振频率进行更好的估计(参考文献 a.5.2)。

A.5.3 结构动力学修改与集成

A.5.3.1 引言

结构动力学修改和集成是一套方法,用以预测已知系统修改后或已知子系统集成后的系统的动态特性(图 a.5.3)。

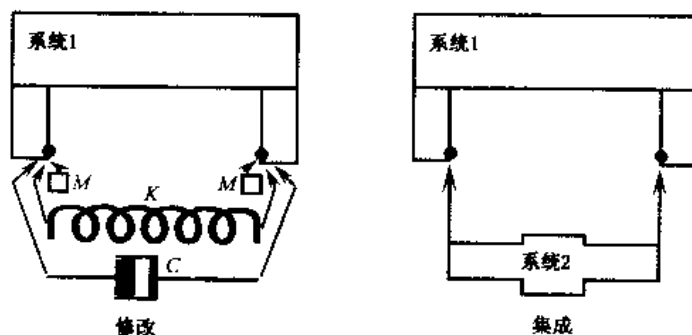


图 a.5.3 结构的修改与集成

在设计和重设计过程中,常常先进行灵敏度分析(A.5.2 节),接着是动力学修改和集成,最后是更准确、更完整的有限元计算。没有有限元模型可资利用时,结构动力学修改及集成方法也可以应用。

本节部分内容是根据参考文献 a.5.2(作者 P. Vanhonacker)和 a.5.4(作者 R. Allemang, D. Brown, M. Soni)写成的。这些参考文献给出了更详尽的说明。

A.5.3.2 方法

有许多方法都适合完成上述任务,即都能预测已知系统修改后或已知子系统集成后的系

统的动态特性。下面几节将简要叙述一下其中的一些方法。模态综合法可能是最简单的一种方法,它是以模态坐标转换为基础的。动柔度法是借助于动柔度或频响函数来估计修改后的动态特性,而动刚度法则是用动刚度来描述结构的变化的。部件模态综合法所用的技术基本上是模态综合法的延伸。

A.5.3.2.1 模态综合

引言

我们在 A.1.2.7 节已经证明,利用变换 $|Y| = [\Phi]|q|$,并以 $[\Phi]^T$ 左乘正交性条件方程 (a.5.7),则可以使扩展系统方程解耦:

(a.5.30)

$$(p[\Phi]^T[A][\Phi] + [\Phi]^T[B][\Phi])|q| = (p[\lambda a] + [\lambda b])|q| = [\Phi]^T|F'|,$$

其中, $|q|$ 叫做模态坐标。解耦系统的维数取决于 $[\Phi]$ 中所考虑的模态数。只有全部模态都已知时,这种变换才不会引起信息损失。然而在一般情况下我们只需要数量有限但足够有效的模态。在此情况下,模态变换将产生一个简化了的系统方程。另外,这种简化方程也可以由测量得到的数据(解释见 A.1.2.8 和 A.1.2.9 节)构成;不必知道质量、阻尼和刚度矩阵。

结构修改(图 a.5.4)

结构修改可以表示为质量、阻尼或刚度矩阵的变化量 $[\Delta M]$ 、 $[\Delta C]$ 和 $[\Delta K]$ 。根据 (a.5.5) 式中的定义,这些变化量与扩展系统矩阵的变化量 $[\Delta A]$ 和 $[\Delta B]$ 相对应。结构经修改后其系统方程变为:

$$(a.5.31) \quad (p([A] + [\Delta A]) + [B] + [\Delta B])|Y| = |F'|,$$

施以模态变换,得:

$$(a.5.32) \quad (p([\lambda a] + [\Delta a]) + [\lambda b] + [\Delta b])|q| = [\Phi]^T|F'|,$$

其中, $[\Delta a] = [\Phi]^T[\Delta A][\Phi]$ 和 $[\Delta b] = [\Phi]^T[\Delta B][\Phi]$ 是非对角矩阵。

根据上述方程的齐次型所表述的特征值问题,可以得出已修改系统的极点 $[\lambda]_m$ 和用模态坐标表示的已修改特征向量 $[q_r]_m$ (m 表示修改过的)。将这些特征向量变回到物理坐标,即可得出修改后模态向量:

$$(a.5.33) \quad [\Phi]_m = [\Phi][q_r]_m \quad \text{或} \quad \begin{bmatrix} [V]_m [\lambda]_m \\ [V]_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [V] [\lambda] \\ [V] \end{bmatrix} [q_r]_m,$$

结构的柔性集成(图 a.5.5)

这个问题作为结构修改的一种特殊情况来阐述。考虑两个系统 1 和 2 的系统方程(a.5.5 式):

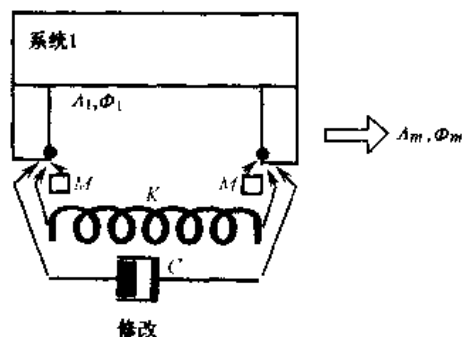


图 a.5.4 模态综合:结构修改

$$(a.5.34) \quad \begin{aligned} (p[A_1] + [B_1])\{Y_1\} &= \{F_1'\} \text{ 和} \\ (p[A_2] + [B_2])\{Y_2\} &= \{F_2'\} \end{aligned}$$

将上面两个方程结合成一个方程,有:

$$(a.5.35) \quad \left(p \begin{bmatrix} [A_1] & [0] \\ [0] & [A_2] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [B_1] & [0] \\ [0] & [B_2] \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \{Y_1\} \\ \{Y_2\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F_1'\} \\ \{F_2'\} \end{Bmatrix}$$

此方程可以看做是系统方程为 $(p[A] + [B])\{y\} = \{F'\}$ 的整体系统的描述。系统 1、2 的柔性集成无外乎是此整体系统的一种修改。因此,前小节所叙述的方法((a.5.30)到(a.5.33)式)估计的是系统 1 和 2 之柔性集成系统的动态特性。

结构的刚性集成(图 a.5.6)

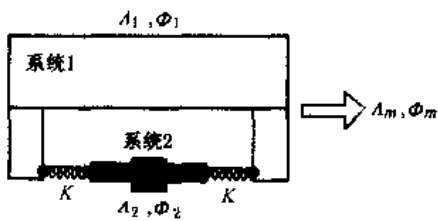


图 a.5.5 模态综合:柔性集成

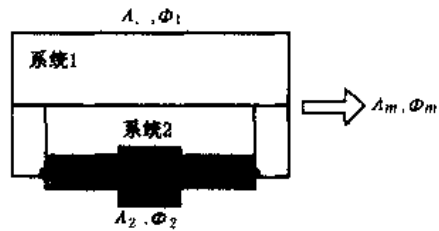


图 a.5.6 模态综合:刚性集成

这种情况较柔性集成多少复杂一些,因为刚性连接在要集成的两个系统的自由度之间施加了严格的约束。而且,总的共振频率数将因许多连接而减少;总的共振频率数等于两个系统各自的共振频率数之和减去连接数。对整体系统(去掉连接)的系统方程(a.5.35)施以下述模态变换:

$$(a.5.36) \quad \begin{Bmatrix} \{Y_1\} \\ \{Y_2\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [\Phi_1] & [0] \\ [0] & [\Phi_2] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{q_1\} \\ \{q_2\} \end{Bmatrix},$$

就得到下式结果:

$$(a.5.37) \quad \left(p \begin{bmatrix} [a_{1\backslash}] & [0] \\ [0] & [a_{2\backslash}] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [b_{1\backslash}] & [0] \\ [0] & [b_{2\backslash}] \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \{q_1\} \\ \{q_2\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [\Phi_1] & [0] \\ [0] & [\Phi_2] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{F_1'\} \\ \{F_2'\} \end{Bmatrix}.$$

刚性集成会给实际的连接自由度施加一些约束,如 $x_{c_1} - x_{c_2} = 0$ (注脚 c 表示连接)。更一般地,这些限制表示为:

$$(a.5.38) \quad [R] \begin{Bmatrix} \{Y_1\} \\ \{Y_2\} \end{Bmatrix} = \{0\}.$$

将(a.5.36)与(a.5.38)式结合在一起便得:

$$(a.5.39) \quad [R] \begin{bmatrix} [\Phi_1] & [0] \\ [0] & [\Phi_2] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{q_1\} \\ \{q_2\} \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} \{q_1\} \\ \{q_2\} \end{Bmatrix} = \{0\}.$$

如上所述,集成结构的共振频率数将减少,减少的数目等于连接点数,所以模态坐标 q_1 和 q_2 并不是独立的。于是我们可以把它们分成独立的(i)和非独立的(d)两组,而约束矩阵 $[T]$ 也照此分块。这样便有:

$$(a.5.40) \quad \begin{bmatrix} [T_d] & [T_i] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_d \\ q_i \end{Bmatrix} = \{0\},$$

$$(a.5.41) \quad \{q_d\} = -[T_d]^{-1}[T_i]\{q_i\} \quad \text{或}$$

$$(a.5.42) \quad \begin{Bmatrix} q_d \\ q_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -[T_d]^{-1}[T_i] \\ [I_n] \end{bmatrix} \{q_i\} = [T']\{q_i\}.$$

$$\text{式中 } [T'] = \begin{bmatrix} -[T_d]^{-1}[T_i] \\ [I_n] \end{bmatrix}.$$

选择非独立的模态坐标时应当能得到一个非奇异的矩阵 $[T_d]$ 。现在方程(a.5.37)可以写成:

$$(a.5.43) \quad \left(p[\backslash a \backslash] + [\backslash b \backslash] \right) [T']\{q_i\} = [\Phi]^T\{F'\}, \text{ 或}$$

$$(a.5.44) \quad \left(p[T']^T[\backslash a \backslash][T'] + [T']^T[\backslash b \backslash][T'] \right) \{q_i\} = [T']^T[\Phi]^T\{F'\}$$

解这个方程的齐次形式的特征值即得集成后结构的系统极点,利用方程(a.5.42)和(a.5.36)还可以解出对应的模态振型向量。

讨 论

关于结构动力学修改和集成的模态综合法根据原有子系统的模态特性来估计修改或集成后的系统的动态特性。因为关于子系统模态特性的那些量可以测量,所以模态综合法很适合利用实验模态分析的结果,倘若这些结果足够准确并换算正确的话。修改或集成后的系统的动态特性可用模态参数来描述。

这种方法比一阶近似灵敏度分析(A.5.2节)更准确,并允许进行更复杂的结构修改。

通常,这些计算是很稳定的。

当根据实验数据应用这一方法时,由于缺少关于转动自由度的信息,结果的精度会受到不利影响。尽管转动和扭矩对连接特性有影响,但目前尚无法获得关于它们的任何信息。

影响精度的第二个限制是模态数。虽然 P. Vanhonacker(参考文献 a.5.2)、A. Klosterman(参考文献 a.5.5)及其他一些人,为解决这个问题研究了许多方法,但在处理过程中考虑所关心的频带范围上下若干个模态之影响,依然是较好的做法。参考文献 a.5.2、a.5.4 和 a.5.5 还论述了模态模型怎样与动刚度模型相结合的问题(见 A.5.3.2.3 节)。

A.5.3.2.2 动柔度法

引 言

动柔度法是根据原始系统的动柔度(或频响应函数)数据估计修改或集成后的系统的动态特性。出于数值稳定性的考虑,这些方法仅限于故障诊断方面。它们借助频率响应来描述所得出的动态特性。

结构修改(图 a.5.7)

令 $[Z]_m$ 是修改后系统的动刚度矩阵,它是频

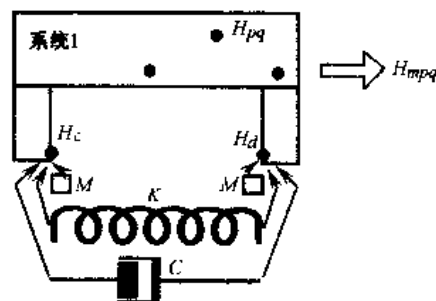


图 a.5.7 动态柔度:结构修改

率的函数(见 a.5.4 式), $[H]_m$ 为相应的动柔度矩阵或称频响函数矩阵。因为这两个矩阵互逆, 所以有

$$(a.5.45) \quad [H]_m [Z]_m = [\backslash I_{\backslash}].$$

结构修改可以表示为原始动刚度矩阵 $[Z]$ 的一个变化量 $[\Delta Z]$, 这样一来可得下式:

$$(a.5.46) \quad [H]_m ([Z] + [\Delta Z]) = [\backslash I_{\backslash}].$$

以原始系统的频响函数矩阵 $[H]$ 右乘上式得

$$(a.5.47) \quad [H]_m ([\backslash I_{\backslash}] + [\Delta Z][H]) = [H], \text{ 或}$$

$$(a.5.48) \quad [H]_m = [H]([\backslash I_{\backslash}] + [\Delta Z][H])^{-1}.$$

上面这两个式子将已修改系统的动柔度矩阵, 表示成了原始系统动柔度矩阵及原始动刚度矩阵修改量 $[\Delta Z]$ 的一个函数。令 c 表示结构修改所涉及之自由度(例如附着点或连接点), f 表示所有其他有关自由度, 则上面方程可以分块为:

$$(a.5.49) \quad \begin{bmatrix} [H_{mff}] & [H_{mfc}] \\ [H_{mef}] & [H_{mcc}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [H_{ff}] & [H_{fc}] \\ [H_{cf}] & [H_{cc}] \end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix} [\backslash I_{ff\backslash}] & [0] \\ [0] & [\backslash I_{cc\backslash}] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [0] & [0] \\ [0] & [\Delta Z_{cc}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [H_{ff}] & [H_{fc}] \\ [H_{cf}] & [H_{cc}] \end{bmatrix} \right)^{-1}.$$

对方程进行整理便得:

$$(a.5.50) \quad \begin{bmatrix} [H_{mff}] & [H_{mfc}] \\ [H_{mef}] & [H_{mcc}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\backslash I_{ff\backslash}] & [0] \\ [\Delta Z_{cc}][H_{cf}] & [\backslash I_{cc\backslash}] + [\Delta Z_{cc}][H_{cc}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [H_{ff}] & [H_{fc}] \\ [H_{cf}] & [H_{cc}] \end{bmatrix}.$$

解上式可得出关于修改后动柔度分块矩阵:

$$(a.5.51) \quad \begin{aligned} [H_{mff}] &= [H_{ff}] - [H_{fc}]([\backslash I_{cc\backslash}] + [\Delta Z_{cc}][H_{cc}])^T [\Delta Z_{cc}][H_{cf}], \\ [H_{mfc}] &= [H_{mef}]^T = [H_{fc}]([\backslash I_{cc\backslash}] + [\Delta Z_{cc}][H_{cc}])^{-1}, \\ [H_{mcc}] &= [H_{cc}]([\backslash I_{cc\backslash}] + [\Delta Z_{cc}][H_{cc}])^{-1}. \end{aligned}$$

上述方程必须在有关的每个频率点上进行求解。这些式子表明, 只有在修改中所涉及到的自由度以及有关自由度的频响函数才是必需的。这些公式还表明, 计算 $([\backslash I_{\backslash}] + [\Delta Z][H])$ 之逆的工作量仅对简单修改才会最小。典型的例子是改变一个自由度的质量, 或改变两个自由度之间的刚度。

假定我们的修改是把自由度 c 的质量改变 ΔM_c , 那么矩阵 $[H_{mff}]$ 的元素 H_{mpq} 就变成:

$$(a.5.52) \quad H_{mpq} = H_{pq} - \frac{H_{pc}(-\omega^2 \Delta M_c)H_{cq}}{1 - \omega^2 \Delta M_c H_{cc}} = H_{pq} - \frac{H_{pc}H_{cq}}{(-\omega^2 \Delta M_c)^{-1} + H_{cc}}.$$

如果我们的修改是改变自由度 c 和自由度 d 之间的线性刚度, 则 $[\Delta Z_{cc}]$ 等于

$\Delta k_{cd} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $[H_{mff}]$ 的元素 H_{mpq} 成为:

$$(a.5.53) \quad H_{mpq} = H_{pq} - \frac{(H_{cq} - H_{dq})(H_{pc} - H_{pd})}{\Delta K_{cd}^{-1} + H_{dd} - H_{cd} + H_{cc} - H_{dc}}.$$

结构的柔性集成(图 a.5.8)

与模态综合方法类似,柔性集成不过是结构修改问题(在这里原始系统是由两个非耦合部件构成的)的一种扩展,因而(a.5.53)式可用。如果 p, q, c 是部件 1 的自由度, d 是部件 2 的一个自由度,那么 $H_{dq} = H_{pd} = H_{cd} = H_{dc} = 0$, 于是(a.5.53)式变为:

$$(a.5.54) \quad H_{mpq} = H_{pq} - \frac{H_{cq}H_{pc}}{\Delta K_{cd}^{-1} + H_{dd} + H_{cc}}.$$

结构的刚性集成(图 a.5.9)

刚性集成只是柔性耦合的特例。令 $\Delta K_{cd} = \infty$, (a.5.54)式则成为:

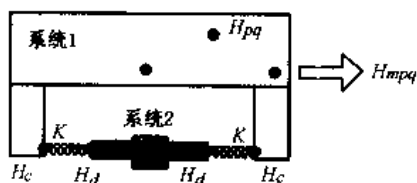


图 a.5.8 动态柔度:柔性集成

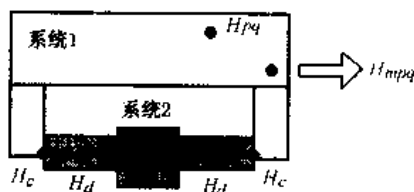


图 a.5.9 动态柔度:刚性集成

$$(a.5.55) \quad H_{mpq} = H_{pq} - \frac{H_{cq}H_{pc}}{H_{dd} + H_{cc}}.$$

将一个自由度(如自由度 d)固定在大地上,则有:

$$(a.5.56) \quad H_{mpq} = H_{pq} - \frac{H_{cq}H_{pc}}{H_{cc}}.$$

讨 论

为了避免矩阵求逆问题,频响函数法或动柔度法就是就单约束情况或简单修改情况而实现的(参考文献 a.5.6),因此这些方法可用于故障诊断。通常要使用实测得到的频响函数。如果测出约束点,响应点及驱动点的原点频响函数和跨点频响函数(这些是惟一必须的信息),便可以把它们直接代入到方程中计算修改后的频响函数。在此情况下,模态模型是不必要的。这使动柔度法成为最快的故障诊断方法,但只是计算修改后的频响函数,并不计算模态模型。在这一过程中,测量的精度极为重要,修改较大时尤其如此。

如果所有必要的频响函数没有全测出来,则可以根据某个模态模型(式(a.5.1))把它们计算出来。在这种情况下,避免进行模态参数估计的优越性就丧失了。另外,为减小实测频响函数中的噪声,可以使用取自某个模态模型的频响函数。这时,模态综合法又成了较好的方法,因为它能得出更多的信息(即完整的模态模型)。

同模态综合法的情况一样,由于未能测得转动自由度的信息,结果的精度会受到负面

影响。

A.5.3.2.3 动刚度法

引言

动刚度法是根据原始系统的动刚度数据对修改后或集成后的系统的动特性进行估计,估计结果是修改后的动刚度。就实验模态分析而言,动刚度法最初是由 Klosterman 建立起来的(参考文献 a.5.5)。

从解析观点(有限元分析)来看,动刚度法是最明了不过的方法,因为动刚度矩阵是现成的。然而在实验模态分析中,实测到的一般是频响函数矩阵,要将动刚度法应用于测量数据,非常关键的一点是必须求频响函数矩阵的逆矩阵。

结构修改(图 a.5.10)

如果 $[Z]$ 是原始系统的动刚度矩阵(式(a.5.4)), $[\Delta Z]$ 是系统修改量,那么修改后的系统的动特性可由下面的动刚度矩阵定义:

$$(a.5.57) \quad [Z]_m = [Z] + [\Delta Z].$$

这个动刚度矩阵可以由不同的来源得到,有限元法便可直接生成这样的矩阵。但从实验观点看,此矩阵并非显而易见。实验得到的是(部分)动柔度矩阵或频响函数矩阵。我们不推荐直接应用测量得到的频响数据。Klosterman(参考文献 a.5.5)建议采用来自实验估计出来的模态模型的综合频率响应数据。即使采用综合频响函数,为计算 $[Z]$ 而求动柔度矩阵 $[H]$ 的逆仍然是个很大的问题。模态模型的精度是个关键点,同时为防止出现奇异性问题,模态模型中的模态数还必须足够多,而且必须在每个频率上进行矩阵求逆。

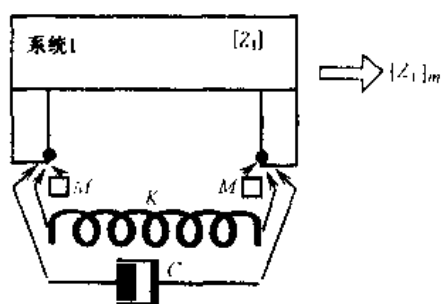


图 a.5.10 动态刚度:结构修改

结构的柔性集成(图 a.5.11)

与模态综合法及动柔度法类似,结构的柔性耦合不过是结构修改的扩展,只是原始系统为 1 和 2 两个部件的非耦组合:

$$(a.5.58) \quad [Z] = \begin{bmatrix} [Z_1] & [0] \\ [0] & [Z_2] \end{bmatrix}.$$

柔性耦合是把 $[Z_1]$ 和 $[Z_2]$ 结合在一起的上面这个矩阵的变化量 $[\Delta Z]$ 。

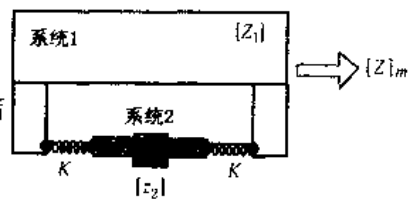


图 a.5.11 动态刚度:柔性集成

结构的刚性集成(图 a.5.12)

在这种情况下约束方程是必不可少的。令 c 表示连接点的自由度, f 表示所有其他有关自由度,那么系统 1 和 2 的动刚度矩阵、位移向量和力向量则可以写成分块矩阵形式:

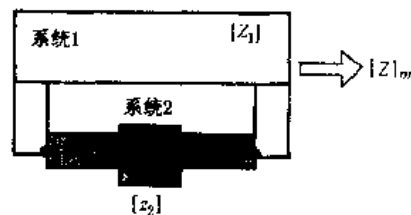


图 a.5.12 动态刚度:刚性集成

a.5.59)

$$\begin{bmatrix} [Z_{1ff}] & [Z_{1fc}] \\ [Z_{1cf}] & [Z_{1cc}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{X_{1f}\} \\ \{X_{1c}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F_{1f}\} \\ \{F_{1c}\} \end{Bmatrix} \text{ 和 } \begin{bmatrix} [Z_{2cc}] & [Z_{2cf}] \\ [Z_{2fc}] & [Z_{2ff}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{X_{2c}\} \\ \{X_{2f}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F_{2c}\} \\ \{F_{2f}\} \end{Bmatrix}.$$

将连接点处的平衡条件与一致性条件

$$(a.5.60) \quad \begin{aligned} \{F_{1c}\} + \{F_{2c}\} &= \{0\} \quad \text{及} \\ \{X_{1c}\} &= \{X_{2c}\} = \{X_c\} \end{aligned}$$

代入(a.5.59)式, 即得:

$$(a.5.61) \quad \begin{bmatrix} [Z_{1ff}] & [Z_{1fc}] & [0] \\ [Z_{1cf}] & [Z_{1cc}] + [Z_{2cc}] & [Z_{2cf}] \\ [0] & [Z_{2fc}] & [Z_{2ff}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{X_{1f}\} \\ \{X_c\} \\ \{X_{2f}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F_{1f}\} \\ \{0\} \\ \{F_{2f}\} \end{Bmatrix}.$$

此方程就描述了集成系统的动态特性。

讨 论

由于动刚度法是借助动刚度来表示系统的动特性的, 因此这种方法在有限元分析方面是特别有用的。如果动刚度矩阵必须要根据测量数据进行计算, 那么像稳定性、奇异性、精度、计算速度等都可能成为问题。因为用得最多的是综合频响函数, 所以模态模型必须很精确(模态换算要适当), 并且模态数要足够多。

同前面讨论的方法一样, 缺乏转动自由度的测量信息, 结果的精度会受到不良影响。

参考文献 a.5.2、a.5.4 和 a.5.5 讨论了如何将模态模型同动刚度模型结合起来。

A.5.3.2.4 部件模态综合

引 言

部件模态综合法专门用于计算子结构集成的动力学特性, 其中各个子结构都用一套简化(广义)自由度分别给以描述。因此每个部件的物理自由度都将被变换成数目减少了的广义坐标。这跟模态综合法(A.5.3.2.1 节)很相似, 在那里用模态向量矩阵将物理坐标变换为模态坐标。

可用的变换方法很多, 很多文献著作论述了大量的部件模态综合方法。因此下一节主要根据参考文献 a.5.4, a.5.6 和 a.5.7 对部件模态综合的各种方法仅仅给出一个基本的概要。

一般步骤

部件模态综合法基本上分做两大步: 第一步是为每一个子结构(或部件)定义一种变换, 此变换将把原来的物理自由度缩减为一组广义自由度。第二步是把所有部件的缩减模型组合成一个整体。由于在部件级已经进行了压缩, 所以集成结构模型总的自由度数将大大减少。

考虑 1 和 2 两个部件的集成。这种情况很容易推广到更多子结构集成。这两个部件都用扩展系统方程(a.5.34)来描述:

$$(a.5.34) \quad \begin{aligned} (p[A_1] + [B_1])\{Y_1\} &= \{F'_1\}, \\ (p[A_2] + [B_2])\{Y_2\} &= \{F'_2\}. \end{aligned}$$

我们用变换矩阵 $[\Gamma_1]$ 和 $[\Gamma_2]$ 将物理坐标 $\{Y_1\}$ 和 $\{Y_2\}$ 变换成广义坐标 $\{g_1\}$ 和 $\{g_2\}$:

$$(a.5.62) \quad \begin{aligned} \{Y_1\} &= [\Gamma_1]\{g_1\}, \\ \{Y_2\} &= [\Gamma_2]\{g_2\}. \end{aligned}$$

变换矩阵 $[\Gamma_i]$ 的列向量是(扩展)模态振型向量、约束向量、附着模态、刚体模态……详见后述。广义坐标向量 $\{g\}$ 常常包含连接自由度或有关自由度的模态坐标(a.5.3.2.1节)和物理坐标。为了达到减少自由度的目的, $[\Gamma_i]$ 矩阵的列数应小于它的行数。

将上述变换代入(a.5.34)式的两个方程,并以 $[\Gamma]^T$ 左乘之,可得:

$$(a.5.63) \quad \begin{aligned} (p[\Gamma_1]^T[A_1][\Gamma_1] + [\Gamma_1]^T[B_1][\Gamma_1])\{g_1\} &= (p[a_1] + [b_1])\{g_1\} = [\Gamma_1]^T\{F'_1\}, \\ (p[\Gamma_2]^T[A_2][\Gamma_2] + [\Gamma_2]^T[B_2][\Gamma_2])\{g_2\} &= (p[a_2] + [b_2])\{g_2\} = [\Gamma_2]^T\{F'_2\}. \end{aligned}$$

为把这两个部件集成起来,先将上式两个方程结合在一个矩阵方程中:

$$(a.5.64) \quad \left(p \begin{bmatrix} [a_1] & [0] \\ [0] & [a_2] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [b_1] & [0] \\ [0] & [b_2] \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \{g_1\} \\ \{g_2\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [\Gamma_1] & [0] \\ [0] & [\Gamma_2] \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \{F'_1\} \\ \{F'_2\} \end{Bmatrix}, \text{或}$$

$$(p[a] + [b])\{g\} = [\Gamma]^T\{F'\}$$

-致性(兼容性)条件指出,连接自由度在被连接的两个部件上应该相等,即 $\{Y_{1c}\} = \{Y_{2c}\}$ 。连续性条件指出,连接界面上的力应相互抵消,即 $\{F_{1c}\} + \{F_{2c}\} = \{0\}$,可以表成下列形式:

$$(a.5.65) \quad \begin{Bmatrix} \{g_1\} \\ \{g_2\} \end{Bmatrix} = \{g\} = [T_c]\{g_a\},$$

式中 $[T_c]$:一致性矩阵;

$\{g_a\}$:集成结构的广义坐标(例如,可包含两个部件的模态坐标,连接点(只能用一次!)的物理坐标以及其他有关点的物理坐标)。

将上述一致性条件引入(a.5.64)式,并以 $[T_c]^T$ 左乘之,则得:

$$(a.5.66) \quad (p[T_c]^T[a][T_c] + [T_c]^T[b][T_c])\{g_a\} = [T_c]^T[\Gamma]^T\{F'\}$$

该方程的齐次形式就是特征值问题,由之可求出集成系统的极点 $[\Lambda_a]$ 和广义坐标下的特征向量 $[g_{ra}]$ 。利用变换式(a.5.65)和(a.5.62),可将这些广义坐标下的特征向量变回为物理特征向量。

对于无阻尼或比例阻尼情形,道理也完全相似。让我们从下式开始:

$$(a.5.67) \quad \begin{aligned} (p^2[M_1] + [K_1])\{X_1\} &= \{F_1\}, \\ (p^2[M_2] + [K_2])\{X_2\} &= \{F_2\}. \end{aligned}$$

对这两个部件施行变换 $\{X_1\} = [\Gamma_1]\{g_1\}$ 和 $\{X_2\} = [\Gamma_2]\{g_2\}$,便可得到压缩系统的数学描述:

$$(a.5.68) \quad \begin{aligned} (p^2[\Gamma_1]^T[M_1][\Gamma_1] + [\Gamma_1]^T[K_1][\Gamma_1])\{g_1\} &= (p^2[m_1] + [k_1])\{g_1\} = [\Gamma_1]^T\{F_1\}, \\ (p^2[\Gamma_2]^T[M_2][\Gamma_2] + [\Gamma_2]^T[K_2][\Gamma_2])\{g_2\} &= (p^2[m_2] + [k_2])\{g_2\} = [\Gamma_2]^T\{F_2\} \end{aligned}$$

将两个部件集成,从下式开始(比较(a.5.64)式):

$$(a.5.69) \quad (p^2[m] + [k])\{g\} = [\Gamma]^T\{F\},$$

并利用一致性方程(a.5.65)式即可得到集成结构的压缩形式的系统方程:

$$(a.5.70) \quad (p^2[T_c]^T[m][T_c] + [T_c]^T[k][T_c])\{g_a\} = [T_c]^T[\Gamma]^T\{F\}$$

下面几段我们将讨论无阻尼情况。

变换模态

如前节所述,变换矩阵 $[\Gamma_i]$ (见 a.5.68 式)的列向量是模态振型向量、约束向量、附着模态、刚体模态等等。

纯模态:纯模态是一个部件的自由振动振型向量。根据连接自由度是否固定,纯模态可以是“固定”界面纯模态或“自由”界面纯模态。承载界面纯模态是对中间固定情况的模拟。把部件 i 的无阻尼运动方程分成连接自由度(c)和自由自由度(f),则有:

$$(a.5.71) \quad \left(p^2 \begin{bmatrix} [M_{iff}] & [M_{ifc}] \\ [M_{icf}] & [M_{icc}] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [K_{iff}] & [K_{ifc}] \\ [K_{icf}] & [K_{icc}] \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \{X_{if}\} \\ \{X_{ic}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F_{if}\} \\ \{F_{ic}\} \end{Bmatrix}.$$

固定界面纯模态 $[\Psi_{ijk}]$ 和对应的共振频率 $[\lambda_{ik}^2]$ 可从下面的特征值问题求得:

$$(a.5.72) \quad (p^2[M_{iff}] + [K_{iff}])\{X_{if}\} = \{0\},$$

其中, $\{X_{if}\} = [\Psi_{ifk}]\{q_{ik}\}$ 是模态变换, k 表示保留的模态坐标, $[\Psi_{ifk}]$ 可以是 $[\Gamma_i]$ 的一部分。

约束模态:约束模态是静态变形形状,是在某个连接自由度上施加一个单位位移而使所有其他连接点上的位移为零而产生的。由下列方程

$$(a.5.73) \quad \begin{bmatrix} [K_{iff}] & [K_{ifc}] \\ [K_{icf}] & [K_{icc}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{X_{if}\} \\ \{I_{cc}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{F_{ic}\} \end{Bmatrix}$$

可确定这些变形形状:

$$(a.5.74) \quad \begin{Bmatrix} \{X_{if}\} \\ \{I_{cc}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -[K_{iff}]^{-1}[K_{ifc}] \\ \{I_{cc}\} \end{Bmatrix}.$$

这些向量可以是 $[\Gamma_i]$ 的一部分。

附着模态:附着模态也是静态变形形状,不过是在其中一个连接自由度上施加一单位力而其余自由度上不加力所引起的。如果该部件不受约束,那么必须对某些额外的自由度(r)加以约束。因此,将静态平衡方程分块可得:

$$(a.5.75) \quad \begin{bmatrix} [K_{iff}] & [K_{ifc}] & [K_{ifr}] \\ [K_{icf}] & [K_{icc}] & [K_{icr}] \\ [K_{irf}] & [K_{irc}] & [K_{irr}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{X_{if}\} \\ \{X_{ic}\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{I_{cc}\} \\ \{F_{ir}\} \end{Bmatrix}.$$

这些变形向量的上面部分事实上是柔度矩阵的列向量,由刚度矩阵的相应部分的逆矩阵定义:

$$(a.5.76) \quad \begin{Bmatrix} \{X_{if}\} \\ \{X_{ic}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{S_{ifc}\} \\ \{S_{icc}\} \end{Bmatrix},$$

$$\text{式中} \quad \begin{bmatrix} [S_{iff}] & [S_{ifc}] \\ [S_{icf}] & [S_{icc}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{iff}] & [K_{ifc}] \\ [K_{icf}] & [K_{icc}] \end{bmatrix}^{-1}.$$

这些向量可以是 $[\Gamma_i]$ 的一部分。参考文献 a.5.7 描述了另外一些方法以处理无约束部件的附着模态问题(例如剩余惯性释放附着模态)。

刚体模态:如果部件没有足够的约束,那么与零共振频率对应的模态就视为刚体模态。约束模态的推导可以提供另一种求取刚体模态的途径。以刚好足够的自由度数(r)对部件加以约束,并采用与约束模态相同的推导方法(r 代替 c ,余下的自由度以 f' 表示,并且令 $[F_u] = [0]$),则得:

$$(a.5.77) \quad \begin{bmatrix} [X_{if'}] \\ [\backslash I_{r'}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -[K_{if'f'}]^{-1}[K_{if'r}] \\ [\backslash I_{r'}] \end{bmatrix}^{-1},$$

这些向量可以是 $[\Gamma_i]$ 的一部分。参考文献 a.5.4 在“可采纳振型函数”标题下面还提到了另一组向量。

应当明确,根据每个部件的可用信息、连接类型、所关心的自由度、感兴趣的频带等等,变换矩阵 $[\Gamma_i]$ 可能有许多种方法构成。作为一个例子,下面几节我们将讨论 Craig - Bampton 法和 Craig - Chang 法(参考文献 a.5.7)。

Craig - Bampton 法

这种经常用在有限元程序中的方法将固定界面纯模态和约束模态结合在一起。压缩变换 $X_i = [\Gamma_i]\{g_i\}$ 就变成:

$$(a.5.78) \quad \begin{Bmatrix} \{X_{if}\} \\ \{X_{ic}\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [\Psi_{if_k}] & -[K_{iff}]^{-1}[K_{ifc}] \\ [0] & [\backslash I_{cc}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{q_{ik}\} \\ \{X_{ic}\} \end{Bmatrix}.$$

保留的模态坐标数(k)取决于所要求的精度和频带宽度。假定这些保留模态是按单位模态质量换算的,则部件简化方程(式(a.5.68))成为:

$$(a.5.79) \quad \left(p^2 \begin{bmatrix} [M_{ikk}] & [m_{ikc}] \\ [m_{ick}] & [m_{icc}] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [k_{ikk}] & [k_{ikc}] \\ [k_{ick}] & [k_{icc}] \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \{q_{ik}\} \\ \{X_{ic}\} \end{Bmatrix} = [\Gamma_i]^T \{F_i\},$$

式中

$$\begin{aligned} [m_{ikk}] &= [\backslash I_{kk}]; \\ [m_{ike}] &= [m_{ick}]^T = [\Psi_{if_k}]^T (-[M_{iff}][K_{iff}]^{-1}[K_{ifc}] + [K_{ifc}]); \\ [m_{icc}] &= [K_{icf}][K_{iff}]^{-1}([M_{iff}][K_{iff}]^{-1}[K_{ifc}] - [M_{ifc}]) - [M_{icf}][K_{iff}]^{-1}[K_{ifc}] + [M_{icc}], \\ [k_{ikk}] &= -[\backslash \lambda_{ik}^2]; \\ [k_{ike}] &= [K_{ick}]^T = [0]; \\ [k_{icc}] &= -[K_{icf}][K_{iff}]^{-1}[K_{ifc}] + [K_{icc}]. \end{aligned}$$

当把部件 1 和 2 结合起来时,一致性变换(方程(a.5.65)式)为:

$$(a.5.80) \quad \begin{Bmatrix} \{q_{1k_1}\} \\ \{X_{1c}\} \\ \{q_{2k_2}\} \\ \{X_{2c}\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [\backslash I_{\backslash}] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [\backslash I_{\backslash}] \\ [0] & [\backslash I_{\backslash}] & [0] \\ [0] & [0] & [\backslash I_{\backslash}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{q_{1k_1}\} \\ \{q_{2k_2}\} \\ \{X_c\} \end{Bmatrix} = [T_c] \begin{Bmatrix} \{q_{1k_1}\} \\ \{q_{2k_2}\} \\ \{X_c\} \end{Bmatrix}$$

集成系统的方程则成为:

$$(a.5.81) \left(p^2 \begin{bmatrix} [M_{mk_1k_1}] & [0] & [M_{mk_1c}] \\ [0] & [M_{mk_2k_2}] & [M_{mk_2c}] \\ [M_{mck_1}] & [M_{mck_2}] & [M_{mcc}] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [K_{mk_1k_1}] & [0] & [0] \\ [0] & [K_{mk_2k_2}] & [0] \\ [0] & [0] & [K_{mcc}] \end{bmatrix} \right) \times \begin{Bmatrix} \{q_{1k_1}\} \\ \{q_{2k_2}\} \\ \{X_c\} \end{Bmatrix} = [T_c]^T [\Gamma]^T \{F\},$$

$$\begin{aligned} \text{式中 } [M_{mk_1k_1}] &= [\backslash I_{k_1k_1} \backslash]; \\ [M_{mk_2k_2}] &= [\backslash I_{k_2k_2} \backslash]; \\ [M_{mk_1c}] &= [M_{mck_1}]^T = [m_{1kc}]; \\ [M_{mk_2c}] &= [M_{mck_2}]^T = [m_{2kc}]; \\ [M_{mcc}] &= [m_{1cc}] + [m_{2cc}]; \\ [K_{mk_1k_1}] &= [\backslash \lambda_{1k}^2 \backslash]; \\ [K_{mk_2k_2}] &= -[\backslash \lambda_{2k}^2 \backslash]; \\ [K_{mcc}] &= [k_{1cc}] + [k_{2cc}]. \end{aligned}$$

应当注意,应用 Craig - Bampton 法时,需要知道(部分)部件质量矩阵和刚度矩阵,因此实验模态参数提供的信息是不够的。

Craig - Chang 法

这种方法将自由界面纯模态与剩余附着模态结合在一起。

由自由界面纯模态可得:

$$(a.5.82) \quad \{X_i\} = \begin{Bmatrix} \{X_{if}\} \\ \{X_{ic}\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [\Psi_{if_k}] \\ [\Psi_{ic_k}] \end{bmatrix} \{q_{ik}\} = [\Psi_{i_k}] \{q_{ik}\},$$

这里, k 表示“保留”模态。

剩余附着模态是静态柔度矩阵的列向量,可以从(a.5.76)式导出。静态柔度矩阵满足下式(假定这些剩余附着模态是按单位模态质量换算的,并且考虑到正交条件(见 A.1.2.7 节)):

$$\begin{aligned} (a.5.83) \quad [S_i] &= [K_i]^{-1} = [\Psi_i] [\backslash - \lambda_i^2 \backslash] [\Psi_i]^T \\ &= [\Psi_{i_k}] [\backslash - \lambda_{i_k}^2 \backslash] [\Psi_{i_k}]^T + [\Psi_{i_d}] [\backslash - \lambda_{i_d}^2 \backslash] [\Psi_{i_d}]^T, \end{aligned}$$

这里, d 表示剩余模态。如果只考虑这些剩余模态的贡献,可把剩余附着模态定义为下列矩阵的最后 c 列:

$$(a.5.84) \quad [\Psi_{i_d}] [\backslash - \lambda_{i_d}^2 \backslash] [\Psi_{i_d}]^T = [S_i] - [\Psi_{i_k}] [\backslash - \lambda_{i_k}^2 \backslash] [\Psi_{i_k}]^T = [S_{i_d}].$$

这一部分压缩变换成为:

$$(a.5.85) \quad \{X_i\} = \begin{Bmatrix} X_{if} \\ X_{ic} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [S_{ifc_d}] \\ [S_{icc_d}] \end{bmatrix} \{f_w\} = [S_{u_d}] \{f_w\}.$$

将(a.5.82)式和(a.5.85)式结合到 $\{X_i\} = [\Gamma_i] \{g_i\}$ 中去,则有:

$$(a.5.86) \quad \begin{Bmatrix} \{X_{if}\} \\ \{X_{ic}\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [\Psi_{if_k}] & [S_{ifc_d}] \\ [\Psi_{ic_k}] & [S_{icc_d}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{q_{ik}\} \\ \{f_{ic}\} \end{Bmatrix}.$$

将两个部件集成起来,并考虑到一致性条件 $\{X_{1c}\} = \{X_{2c}\}$ 和连续性条件 $\{F_{1c}\} + \{F_{2c}\} = 0\}$,则得如下的一致性变换:

a.5.87)

$$\begin{Bmatrix} \{q_{1k}\} \\ \{f_{1c}\} \\ \{q_{2k}\} \\ \{f_{2c}\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [I] & [0] \\ -([S_{1\alpha_d}] + [S_{2\alpha_d}])^{-1}[\Psi_{1ic_k}] & -([S_{1\alpha_d}] + [S_{2\alpha_d}])^{-1}[\Psi_{2ic_k}] \\ [0] & [I] \\ ([S_{1\alpha_d}] + [S_{2\alpha_d}])^{-1}[\Psi_{1ic_k}] & -([S_{1\alpha_d}] + [S_{2\alpha_d}])^{-1}[\Psi_{2ic_k}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{q_{1k}\} \\ \{q_{2k}\} \end{Bmatrix}.$$

参考文献 a.5.7 证明,从上述结果可得出如下的整体系统方程:

(a.5.88)

$$\left(p^2 \begin{bmatrix} [M_{mk_1k_1}] & [M_{mk_1k_2}] \\ [M_{mk_2k_1}] & [M_{mk_2k_2}] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [K_{mk_1k_1}] & [K_{mk_1k_2}] \\ [K_{mk_2k_1}] & [K_{mk_2k_2}] \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \{q_{1k}\} \\ \{q_{2k}\} \end{Bmatrix} = [T_c]^T [\Gamma]^T \{F\},$$

式中

$$\begin{aligned} [M_{mk_1k_1}] &= [I_{k_1k_1}] + [\Psi_{1c_k}]^T [\hat{m}] \Psi_{2c_k}; \\ [M_{mk_1k_2}] &= [M_{mk_2k_1}]^T = -[\Psi_{1c_k}]^T [\hat{m}] \Psi_{2c_k}; \\ [M_{mk_2k_2}] &= [I_{k_2k_2}] + [\Psi_{2c_k}]^T [\hat{m}] \Psi_{2c_k}; \\ [K_{mk_1k_1}] &= [-\lambda_{1k}^2] + [\Psi_{1c_k}]^T [\hat{k}] \Psi_{1c_k}; \\ [K_{mk_1k_2}] &= [K_{mk_2k_1}]^T = -[\Psi_{1c_k}]^T [\hat{k}] \Psi_{2c_k}; \\ [K_{mk_2k_2}] &= [-\lambda_{2k}^2] + [\Psi_{2c_k}]^T [\hat{k}] \Psi_{2c_k}; \\ [\hat{m}] &= [\hat{k}] ([S_{1d}]^T [M_1] [S_{1d}] + [S_{2d}]^T [M_2] [S_{2d}]) [\hat{k}]; \\ [\hat{k}] &= ([S_{1cc_d}] + [S_{2cc_d}])^{-1}. \end{aligned}$$

应当指出,应用 Craig - Chang 法时,需要知道部件的(部分)质量矩阵。虽然这种方法不像 Craig - Bampton 法那么直截了当,但能给出很好的结果,而且,这种方法直接用模态坐标表示结果。

讨 论

前已指出,部件模态综合涉及到的面很广。不论是为了改善废弃信息的表示方法,还是为了改进用实验方法描述的部件的集成,部件模态综合都是一个永久性的研究课题。然而可以肯定,部件综合与有限元分析结合起来,对于在尺寸缩减后的模型的基础上估计集成结构的动

力学特性,提供了一个强有力的工具。

至于所有前面提到的方法,输入信息的精度和完整性至关重要。因此,从测量角度来看,测量的误差、模态数的不足、自由度数目的不完整(缺少转动自由度!)等,可能使所得结果毫无用处。

A.5.3.3 应用方面

前面几节已经说明,结构的动力学修改与集成技术可以预测一个系统(即已知系统修改后或已知子系统集成后的系统)的动态特性。因此,在(再)设计流程中,这些修改和集成技术常常是跟在灵敏度分析(A.5.2节)之后,而在更精确、更完整的有限元计算之前。有些方法只采用测量数据就够了。一些实际问题将限制结构动力学集成技术的精度(见B.2.2.1节)。所以,为克服实验信息的不完整性而用有限元数据加以补充,这些方法将产生较好的结果。

A.5.4 结 论

本章讨论了几种方法,根据(测量的)动态信息评估不同载荷下或不同组合形态下系统的动态特性。

强迫响应分析是根据适当的模态数据信息预测系统对已知动态力的响应的一种工具。

灵敏度分析提供(小的)修改对共振频率和模态振型的影响的一阶估计。由于计算稳定、快速,并给出许多信息,因此这种技术为(再)设计决策提供了非常有用的基础。

然后,根据结构动力学修改技术所提供的更为精确的结果可以对这些设计决策予以验证。这些技术还允许进行更大的结构修改,例如两个部件的集成。

要想得到好的结果,输入数据的精度和完整性是一个重要条件。从测量观点看,这意味着如果测量的目的是结构动力学修改,那么实验要格外仔细,并且要尽量完整。根据当前的技术发展情况,测量扭转自由度几乎是不可能的,这就使数据总是不完整。设计者在使用这些数据时一定要明白这方面信息的不足。

A.6 章 数值模型与实验模型相结合

A.6.0 引言

当今,在机械结构设计中,结构的动态特性受到越来越多的重视。结构在循环载荷下的寿命、振动量级或噪声辐射、控制系统与结构振动之间的相互作用等,对设计者常常是重要的制约因素。然而分析结构的动态特性并非那么轻而易举。设计者需要通过试验方法或数值计算方法来确定机械结构的模态参数。这两种途径的研究结果密切相关。对样机的实验测量给出的仅仅是结构在试验状态下的信息。有限元模型可以预测结构在各种载荷与边界条件下的动态特性,但有限元模型的可靠性常常不能保证。

模型修正技术可以根据实验数据检验并矫正有限元模型。模型修正分析的结果还是一个用于进一步预测的更可靠的有限元模型。模型修正一节(A.6.1节)主要是根据参考文献 a. 6.25(L. Lammens)写成的。

其次,有了被试结构或类似结构的有限元模型或实验模型,可以给试验工程师提供有关进行试验的许多有价值的信息,提高数据的质量,减少试验时间。因此,这种将数值模型和实验模型相结合的技术,称做预试验分析,是根据已有经验建立起来的一种方法。A.6.2节讨论的某些技术理论可用于试验的设计和准备工作。

A.6.1 模型修正

A.6.1.1 引言和一般思路

模型修正的目标是导出一个能够对机械结构的动态特性进行准确而可靠预测的有限元模型。图 a.6.1 是研究模型修正的总的思路。

修正过程从构造一个有限元模型开始。结构被分成在节点处相互连接的若干单元,每个节点有一个或几个自由度。自由度表示离散形式的结构的位移和变形。每一块离散结构材料通过单元矩阵对整体的质量、刚度和阻尼都有贡献。所有单元矩阵的集合便是整体系统矩阵:质量矩阵 $[M]$,刚度矩阵 $[K]$ 和阻尼矩阵 $[C]$ 。阻尼矩阵常加以忽略,因为(非线性)阻尼机制的多样性使建立关于阻尼特性的可靠模型十分困难,而且一般认为阻尼力跟惯性力和弹性力相比是很小的。

从系统矩阵出发,模态参数可以通过解下面拉氏域的运动方程计算出来:

$$(a.6.1) \quad (-p^2[M] + p[C] + [K])\{X\} = \{0\}.$$

该方程可以重写成下面的特征值问题(见 A.1.2.2 节):

$$(a.6.2) \quad \left(p \begin{bmatrix} [M] & [0] \\ [0] & -[M] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [C] & [K] \\ [M] & [0] \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \dot{X} \\ X \end{Bmatrix} = \{0\}.$$

由此可求得特征值 $\lambda_r = \sigma_r + j\omega_r$ 和相应的特征向量 $\{\Psi\}_r$ 。各特征向量的比例换算决定模态

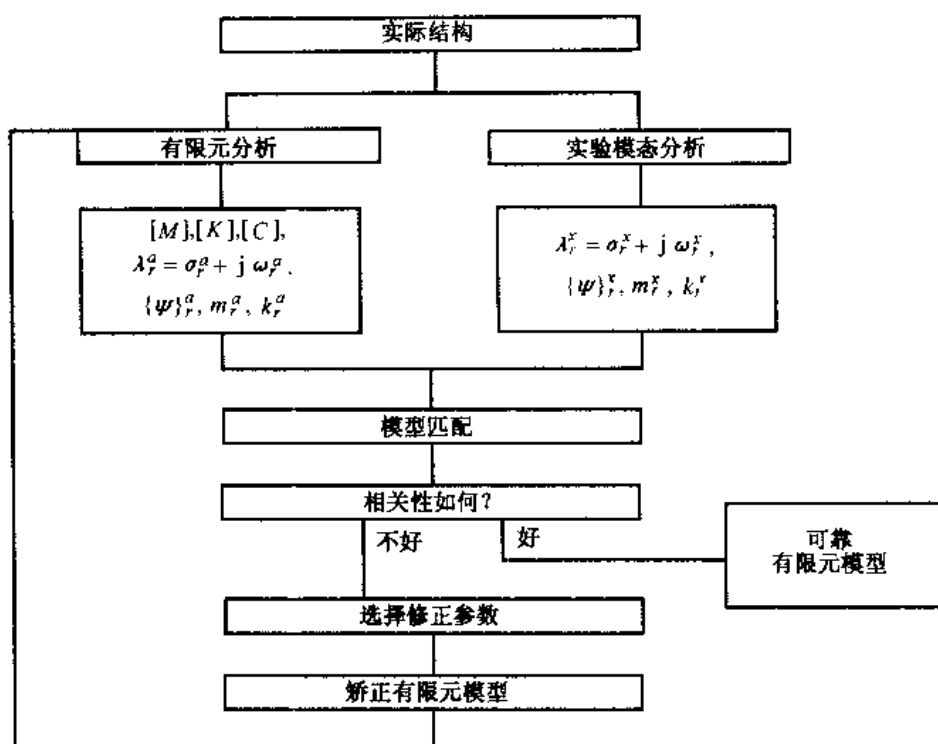


图 a.6.1 模型修正研究的总思路

质量 m_r 和模态刚度 k_r (见 A.1.2.7 节和 A.1.2.8 节)。

有限元分析要为模型修正过程提供下列输入参数:

系统矩阵: $[M]$, $[K]$ 和 $[C]$ 或频响函数,

模态参数: $\lambda_r = \sigma_r + j\omega_r$, $\{\Psi\}_r$, m_r 和 k_r , ($r = 1, 2, \dots, N_m$)。我们已经指出, 阻尼常可忽略: $[C] = [0]$, $\sigma_r = 0$ 。

为避免跟实验数据相混淆, 本章中解析模态参数将记之以注脚^a:

$$\lambda_r^a = \sigma_r^a + j\omega_r^a, \{\Psi\}_r^a, m_r^a, k_r^a.$$

在模型修正过程中, 这些有限元分析结果也将被修正。通过实验识别出来的模态参数是解析模态参数将与之匹配的参考数据。

在实验中, 首先测量结构的频响函数, 然后用参数估计方法识别模态参数 (见 A.3 章)。本章中以注脚^x 记实验参数:

$$\lambda_r^x = \sigma_r^x + j\omega_r^x, \{\Psi\}_r^x, m_r^x, k_r^x.$$

模型修正过程是从模型匹配这一步开始的。一般, 试验测量网点并不能与有限元模型节点完全对应。首先, 某个测量点未必与有限元模型的某一节点相对应。但这个问题很容易避免, 只要解析模型的建立者与测量方案的设计者之间善加沟通即可。其次, 但却更重要的是, 有限元模型通常所含自由度比实验测量的自由度多得多。对于某些相关技术及大多数矫正技术, 要求解析模型和实验模型自由度必须一一对应。为解决这种网格的不一致性, 要么必须减小解析系统矩阵, 使与实验设置的自由度数相等, 要么必须将实验数据扩展到有限元模型的自由度数。A.6.1.2 节概述了一些常用的数据压缩与扩展技术。系统矩阵的压缩或实验数据的扩展, 是成功实现模型修正的主要障碍。

模型匹配这一步完成之后,接下来是相关性检查。解析模态参数和实验模态参数要在多方面进行比较。如果相关性很好,则模型修正过程就此结束,并认为有限元模型对于以后的计算及预测已足够可靠。如果相关性很差(多半如此),那么为了改善与实验数据的相关性,必须按照修正程序对有限元模型加以矫正。A.6.1.3节综述了最常用的相关技术。

相关性不好时,必须矫正有限元模型。矫正解析模型的第一步是选择修正参数。这一步要辨别有限元模型的哪些参数是不准确的,因而是必须要矫正的。要成功地实现模型修正,选择修正参数是关键性的一步。A.6.1.4节概述了各种不同的修正参数。

修正过程的最后一步是矫正。为给修正参数找到新值,这一步要使用实验数据。修正过的参数引入有限元模型后,假如矫正这一步是成功的话,该模型将给出与实验模态数据良好相关的解析模态参数。A.6.1.5节概述最新的矫正技术。

由实验方法获得的数据与根据有限元模型得来的数据常常不一致,主要有四个原因:

- 测量自由度与有限元模型中的自由度不一致:模型修正过程中的模型匹配一步对此问题给出了大致的解决办法。

- 实验模态数据组不完整:不但实验自由度数有限,而且实验模态数据组也有限。频响函数测量只能在有限的频带上进行,因而识别出来的模态数据组是不完整的。此频带之外的模态振型不能识别。因为这些不完整的模态实验数据在模型修正过程中被当做参考数据,所以修正过程的结果将不是惟一的。

- 噪声侵染了测量:共振频率3%的相对误差、各阶振型10%的相对误差、模态质量和模态刚度30%的相对误差被认为是可以接受的。很显然,采用误差大的实验数据在相关分析和误差定位时会产生误导,会使矫正步骤收敛于不准确的、毫无意义的值。在模型修正过程中,常常不用模态质量和模态刚度。关于实验数据的不准确性,本章不再作进一步讨论,但需要强调的是,只有在缜密的数据测量基础之上,成功的模型修正才有可能。

- 阻尼没有被准确地包含在有限元模型中:阻尼信息固存于实验数据之中,但在有限元模型中却被忽略了,结果是用阻尼结构的实验数据来修正无阻尼的有限元模型。显然这一矛盾在模型修正过程中会引致误差。模型归一化技术是避免这一困难的近似途径。这种阻尼不兼容性不再进一步讨论。

附录 AA.6.1的例子对本节介绍的许多概念予以说明。

A.6.1.2 模型匹配

A.6.1.2.1 引言

有限元模型的自由度数一般总是大大超过测量的自由度数。有限元分析要求细密的节点网格以便提供准确的预测。但是在实际结构上测出所有对应的自由度是不现实的,甚至是不可能的,这是因为:

- 许多有限元节点处于结构的内部,无法测到;
- 转动自由度难以测量;
- 对于实验模态分析而言,细密的测点网格是不必要的,常常也是不实际的。

然而大多数模型修正方法要求解析自由度与实验自由度之间具有一一对应关系。对这样两组数据,自由度的数目及位置必须相同。模型修正过程中的模型匹配近似解决了实验自由

度和解析自由度之间网点的不一致性。

在第一阶段,要鉴别与每一个实验自由度相对应的解析自由度,这一操作就是定义一组“有效”自由度,而所有其他解析自由度叫做“废弃”自由度:

$$(a.6.3) \quad \{X_F\} = \begin{Bmatrix} \{X_A\} \\ \{X_D\} \end{Bmatrix},$$

式中 $\{X_A\}$:有效自由度;

$\{X_D\}$:废弃自由度;

$\{X_F\}$:全部自由度。

仅仅得到解析自由度和实验自由度的相应对子之后,实验模态振型和解析模态振型及它们的系统矩阵仍然具有不同的维数,因此模型匹配的第二阶段要通过压缩解析模型或扩展实验模型来解决这个尺寸大小不一致的问题。

解析模型压缩就是把废弃自由度从解析模态振型及系统矩阵中剔除。模态振型的压缩极为直截了当,从振型中把废弃自由度抹掉即可;但系统矩阵的压缩就不那么直接了,必须采用所谓压缩技术。各种压缩技术的正确性都受到一定的限制。压缩后的矩阵只能在一个或若干个特定的频率上准确描述有效自由度的动态特性。而且,系统矩阵一经压缩,它的连通性便遭到了破坏,结果其元素的物理意义也破坏了。正因为如此,压缩技术几乎完全不能与误差定位方法及误差矫正方法结合使用,因为后者是以解析数据与实验数据之间的差别为根据的。然而,如果压缩方法针对的是比较整体的测量,并且这种压缩在特定的频率上具有明确的物理意义,那么压缩解析系统矩阵常常比扩展实验模态振型更具优越性。A.6.1.2.2节将更详尽地讨论压缩方法。

扩展技术是把测量得到的模态振型扩充到有限元模型的全套自由度。大多数扩展技术都采用有限元模型数据来扩充测得的模态振型。因为实验模态数据和解析模态数据之间的差别是大多数修正方法的基础,所以扩展模态振型时要特别小心,不要偏离由实验模态振型给出的信息。

A.6.1.2.3节将详细总结最常用的扩展技术。

A.6.1.2.2 压缩技术

一般论点

压缩技术是只用与实测自由度相对应的解析自由度来表示解析系统矩阵。这些自由度叫做“有效”自由度,其余自由度(即“废弃”自由度)予以剔除(见 a.6.3 式)。压缩技术通过一个变换矩阵 $[T_D]$ 或 $[T_F]$ 定义有效自由度和废弃自由度之间的一种关系:

$$(a.6.4) \quad \{X_D\} = [T_D]\{X_A\},$$

$$(a.6.5) \quad \{X_F\} = [T_F]\{X_A\},$$

$$(a.6.6) \quad [T_F] = \begin{bmatrix} [I] \\ [T_D] \end{bmatrix}.$$

$[T_F]$ 用以得到压缩质量矩阵 $[M^R]$ 和压缩刚度矩阵 $[K^R]$ 。对于无阻尼系统,下列能量关系成立:

$$(a.6.7) \quad \{X_F\}^T [M] \{X_F\} = \{X_A\}^T [M^R] \{X_A\}$$

$$(a.6.8) \quad \{X_F\}^T [K] \{X_F\} = \{X_A\}^T [K^R] \{X_A\}$$

将 $\{X_F\}$ 代之以 $[T_F] \{X_A\}$, 得:

$$(a.6.9) \quad [M^R] = [T_F]^T [M] [T_F],$$

$$(a.6.10) \quad [K^R] = [T_F]^T [K] [T_F].$$

下面的推导证明, 压缩后的系统矩阵仅仅是完整系统矩阵所定义的“准确”动态特性的一种近似描述。

完整系统的全部自由度必定适合下面的运动方程:

$$(a.6.11) \quad [Z(\omega)] \{X_F\} = ([K] - \omega^2 [M]) \{X_F\} = \{F_F\}.$$

压缩后的系统, 其废弃自由度中不含外力。将动刚度矩阵分块得:

$$(a.6.12) \quad \begin{bmatrix} [Z_{AA}] & [Z_{AD}] \\ [Z_{DA}] & [Z_{DD}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{X_A\} \\ \{X_D\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F_A\} \\ \{0\} \end{Bmatrix}.$$

将第二个行块中的 $\{X_D\}$ 分离出去, 便有:

$$(a.6.13) \quad \{X_D\} = -[Z_{DD}]^{-1} [Z_{DA}] \{X_A\},$$

将此式代入第一个行块可得如下结果:

$$(a.6.14) \quad ([Z_{AA}] - [Z_{AD}][Z_{DD}]^{-1}[Z_{DA}]) \{X_A\} = \{F_A\}, \text{ 或} \\ [\tilde{Z}(\omega)] \{X_A\} = \{F_A\},$$

其中,

$$(a.6.15) \quad [\tilde{Z}(\omega)] = ([K_{AA}] - \omega^2 [M_{AA}]) - \\ ([K_{AD}] - \omega^2 [M_{AD}])([K_{DD}] - \omega^2 [M_{DD}])^{-1}([K_{DA}] - \omega^2 [M_{DA}]).$$

动刚度矩阵 $[\tilde{Z}(\omega)]$ 是压缩系统动态特性的“准确”描述。显然, 由下式定义的压缩动刚度

$$(a.6.16) \quad [Z^R(\omega)] = [K^R] - \omega^2 [M^R]$$

并不是在所有频率上都等于 $[\tilde{Z}(\omega)]$ 的, 所以说压缩了的矩阵模型只能近似描述动态特性。

动态压缩

动态压缩法(参考文献 a.6.1)将式(a.6.15)应用于选定的频率 ω_R , 给出动刚度 $[T_D^{dyn}]$ 的定义:

$$(a.6.17) \quad \{X_D\} = -[Z_{DD}(\omega_R)]^{-1} [Z_{DA}(\omega_R)] \{X_A\} = [T_D^{dyn}] \{X_A\}$$

结果, 压缩矩阵 $[M^R]$ 和 $[K^R]$ 只是在频率 ω_R 上能够准确描述模型化结构的动态特性, 而对于所有其他频率, $[M^R]$ 和 $[K^R]$ 只能给出近似的动刚度 $[Z^R]$ 。越是远离压缩频率 ω_R , 近似性就越差。

我们熟知并经常应用的一种特别的动态压缩方法叫 Guyan 压缩法(参考文献 a.6.2), 其压缩频率 $\omega_R = 0$ 。

系统等效压缩与等效扩展处理

系统等效压缩和扩展处理(SEREP)法(参考文献 a.6.3)认为关系式

$$(a.6.18) \quad \{X_F\} = [T_F]\{X_A\}$$

应当满足所有已知模态振型:

$$(a.6.19) \quad [\Psi_F] = [T_F^{\text{exp}}][\Psi_A].$$

因为模态数 N_m 通常都小于有效自由度数 N_A , 所以(a.6.19)式描写的是个不定问题。用 $[\Psi_A]$ 的广义逆 $[\Psi_A]^+ = ([\Psi_A]^T[\Psi_A])^{-1}[\Psi_A]^T$ 解上述方程, 可得:

$$(a.6.20) \quad [T_F^{\text{exp}}] = [\Psi_F][\Psi_A]^+.$$

该压缩后的系统与我们在压缩过程中所使用的完整系统具有相同的模态。但如果所用模态数小于有效自由度数, 那么压缩系统矩阵就不是满秩的。

改进的压缩系统

改进压缩系统(IRS)法(参考文献 a.6.4)是以共振频率点的运动方程为出发点的:

$$(a.6.21) \quad \begin{bmatrix} [K_{AA}] & [K_{AD}] \\ [K_{DA}] & [K_{DD}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\Psi_A] \\ [\Psi_D] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [M_{AA}] & [M_{AD}] \\ [M_{DA}] & [M_{DD}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\Psi_A] \\ [\Psi_D] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{rA}^2 \\ \omega_{rD}^2 \end{bmatrix}.$$

从第二行块隔离出 $[\Psi_D]$, 则有:

$$(a.6.22) \quad [\Psi_D] = -[K_{DD}]^{-1}[K_{DA}][\Psi_A] + [K_{DD}]^{-1}([M_{DA}] \quad [M_{DD}])[\Psi_F] \begin{bmatrix} \omega_{rA}^2 \\ \omega_{rD}^2 \end{bmatrix}.$$

由于 $[\Psi_F]$ 含有未知部分 $[\Psi_D]$, 因此采用迭代程序:

$$(a.6.23) \quad [T_D^i] = -[K_{DD}]^{-1}[K_{DA}] + [K_{DD}]^{-1}([M_{DA}] \quad [M_{DD}])[T_F^{i-1}][M^{i-1}]^{-1}[K^{i-1}],$$

$$(a.6.24) \quad [T_F^i] = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ \end{bmatrix} \\ [T_D^i] \end{bmatrix},$$

$$(a.6.25) \quad [M^i] = [T_F^i]^T[M][T_F^i],$$

$$(a.6.26) \quad [K^i] = [T_F^i]^T[K][T_F^i].$$

这里假定 $[T_F^0] = 0$, $[\Psi_A] \begin{bmatrix} \omega_{rA}^2 \\ \end{bmatrix} \approx [M^i]^{-1}[K^i][\Psi_A]$ 。经过几次迭代之后, 该程序收敛于 $[T_F^{\text{irs}}]$, $[M^{\text{irs}}]$ 和 $[K^{\text{irs}}]$ 。

A.6.1.2.3 扩展技术

引言

扩展技术是将实验模态振型在大小上从一组有效自由度扩充到解析模型的全套自由度。实验模态振型中的未知废弃自由度的估算常常是以解析模型中有效自由度和废弃自由度之间的关系为根据而进行的。

前一节叙述的各种压缩技术都可以被用作扩展技术, 因为压缩技术定义的是解析模型的有效自由度和废弃自由度之间的一种关系:

$$(a.6.27) \quad \{X_D\} = [T_D]\{X_A\},$$

同样的变换矩阵可用于实验模态振型:

$$(a.6.48) \quad \{\Psi_D\}_r^x = [T_D]\{\Psi_A\}_r^x.$$

本节讨论另外几种扩展技术。

特征向量混合

这个方法很简单,它是用相应的解析模态振型的值填补实验模态振型中所缺失的自由度:

$$(a.6.29) \quad \{\Psi_F\}_r^x = \begin{Bmatrix} \{\Psi_A\}_r^x \\ \{\Psi_D\}_r^x \end{Bmatrix}.$$

填补之前,解析模态振型 $\{\Psi_F\}_r^a$ 和实验模态振型 $\{\Psi_A\}_r^x$ 必须加以比例换算,使二者长度相等:

$$(a.6.30) \quad \|\{\Psi_A\}_r^x\| = \|\{\Psi_A\}_r^a\|.$$

模态坐标法

这一方法(参考文献 a.6.5)把实验模态振型定义为解析模态振型的线性组合,该线性组合的系数根据有效自由度来计算:

$$(a.6.31) \quad [\Psi_A]^x = [\Psi_A]^a [q],$$

$$(a.6.32) \quad [q] = [\Psi_A]^a{}^+ [\Psi_A]^x.$$

然后利用矩阵 $[q]$ 来估计实验振型中缺失的自由度:

$$(a.6.33) \quad [\Psi_D]^x = [\Psi_D]^a [q].$$

对于有效自由度来说,原来的测量值可以保留,也可以用它们在解析模态振型组上的投影代替,这样做对实验模态振型具有平滑效果。

插值法

插值法可用以估计缺失自由度。插值法的一个优点是,扩展实验模态振型时不必用解析数据。该方法在很大程度上依靠的是不同自由度之间的连通性,因此,每个插值绝不可能独立,这就使它的实际应用相当困难。实践上,插值法的应用只限于一维部件所组成的结构。当有效自由度组仅由直线自由度组成时,那么对转动自由度的估计是一种数值上不稳定的过程。

A.6.1.2.4 小结

本节解释了模型匹配步骤为什么是必要的,如何进行模型匹配。模型匹配时,或者压缩解析系统矩阵,或者扩展实验模态模型,二者必择其一。虽然压缩方法会引起物理可解释性的丧失,但与扩展法相比,作者还是喜欢用前者。因为扩展法将解析数据与实验数据混杂在一起,具有抹杀实验模态振型与解析模态振型之间差别的倾向。动态压缩是最常用的方法,因为它只要求简单计算就够了。但动态压缩法不太精确(除非在压缩频率上)。其他一些压缩技术比较费时,但能给出比较准确、可靠的压缩动态模型。附录 AA.6.1 举了一个例子。

A.6.1.3 相关技术

A.6.1.3.1 引言

模型修正的目的是使有限元模型与实验数据相一致。欲评价它们之间的一致程度,需要某些被普遍接受的准则。相关方法就是比较解析模态数据与实验模态数据的一套技术。相关

性研究的结果决定是否有必要对有限元模型进行矫正。在整个修正过程中,相关性研究这一步跟在模型匹配之后而走在选择修正参数和矫正解析模型之前。

本节对最常用的若干相关技术给出一个综述。由于每一种相关技术只在实验数据和解析数据的相关关系的某个方面占有优势,因此仅仅考虑一两种相关技术是不可能完成深刻的相关研究的。为了对解析数据和实验数据之间的一致性程度有一个合理的认识,必须同时使用,尽可能多的相关技术。

本节末尾将就网点不一致性对相关结果的影响予以评述。

A.6.1.3.2 共振频率差

最早的相关性检查是比较解析共振频率与实验共振频率。最大可允许的差取决于实验共振频率的精度。

A.6.1.3.3 模态振型的视觉比较

画出解析振型和实验振型可对二者进行视觉比较。在此比较的基础上可将相应的解析振型和实验振型配成对子。这个配对操作可以揭示丢失的实验模态,或模态振型中的局部差别。解析和实验模态振型的视觉比较时常受到实验测量点不足的困扰。

视觉观察振型之间的相关性的另一种途径是所谓的45°图。在 $x-y$ 平面上画出一个实验振型对对应解析振型的曲线图。如果这两个振型相同并且比例换算的方法也相同,那么所有的点都位于通过原点的45°的直线上。从实验振型对解析振型点到该45°线的距离便是振型相关性的指示。图 a.6.2 表示典型的45°图。

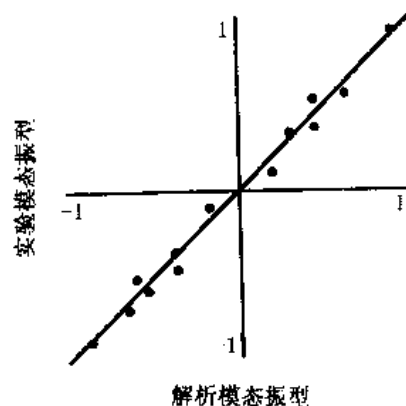


图 a.6.2 典型的45°图

A.6.1.3.4 模态置信准则

模态置信准则(MAC)是用单独一个数表示在45°图上看到的相关性程度(参考文献 a.6.6)。MAC 值是每一对解析振型和实验振型的相关系数:

$$a.6.34) \quad MAC^{a-e}(i, j) = \frac{|\{\Psi\}_i^a \{\Psi\}_j^e|^2}{(\{\Psi\}_i^a \{\Psi\}_i^a) (\{\Psi\}_j^e \{\Psi\}_j^e)} \quad \left| \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, N_m^a \\ j = 1, 2, \dots, N_m^e \end{array} \right.$$

MAC 值总是介于0和1之间。MAC 值等于1,表示相关极好;等于0表示两个模态毫不相关。当把所有 $MAC(i, j)$ 值排到一个矩阵中时,如果相关好,那么对角线上的 MAC 值就应比较大(>0.8)。

A.6.1.3.5 同位模态置信准则

同位模态置信准则(COMAC)是就每一个自由度来考察整个的解析振型和实验振型之间的相关关系(参考文献 a.6.7)。关于自由度 j 的 COMAC 值如下计算:

$$(a.6.35) \quad COMAC(j) = \frac{\left(\sum_{i=1}^{N_m^e} \Psi_i^a(j) \cdot \Psi_i^e(j) \right)^2}{\left(\sum_{i=1}^{N_m^e} \Psi_i^a(j) \cdot \Psi_i^a(j) \right) \left(\sum_{i=1}^{N_m^e} \Psi_i^e(j) \cdot \Psi_i^e(j) \right)}$$

这里, Ψ_i^a 和 Ψ_i^e 是相对应的模态振型。同 MAC 一样, COMAC 的值接近 1, 表示相关好。COMAC 对振型的比例换算方法很敏感, 因此必须格外谨慎, 要用一致的方法对解析模态振型和实验模态振型进行比例换算。MAC 和 COMAC 之间的关系如图 a.6.3 所示。

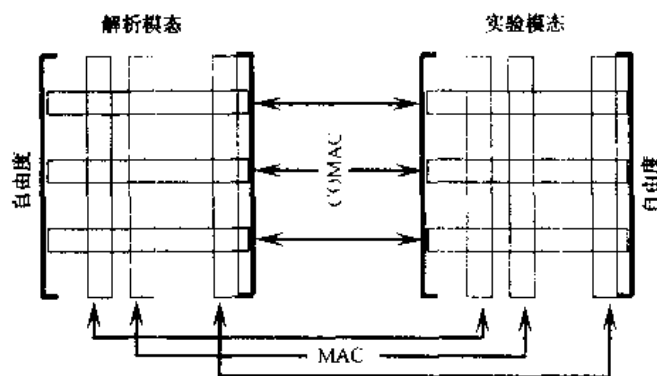


图 a.6.3 MAC 和 COMAC 示意图

A.6.1.3.6 频响函数的比较

如果解析频响函数是以比较合理的阻尼近似值计算的, 并且按与实验频响函数相同的频率范围和比例换算方法画成曲线, 那么对相应的解析频响函数和实验频响函数加以比较, 就是评价有限元模型质量的很好准则。

A.6.1.3.7 频响置信准则(FRAC)与响应向量置信准则(RVAC)

正像 MAC 和 COMAC 是在模态振型向量级别定量刻画模型的相关性一样, 频响函数置信准则(FRAC)和响应向量置信准则(RVAC)是在频响函数级别来描述模型的相关性的。图 a.6.4 说明了这一思想。

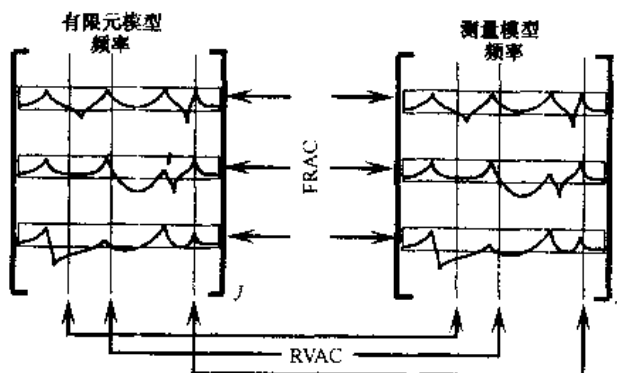


图 a.6.4 FRAC 和 RVAC 示意图

参考文献 a.6.25 把自由度 i (输入自由度 j) 的频率响应置信准则 (FRAC) 定义为:

$$(a.6.36) \quad \text{FRAC}(i) = \max_{\beta} \left(\frac{|\langle H(\beta\omega)_i^a \rangle_j \langle H(\omega)_i^x \rangle_j^{T*}|^2}{(\langle H(\beta\omega)_i^a \rangle_j \langle H(\omega)_i^a \rangle_j^{T*}) (\langle H(\omega)_i^x \rangle_j \langle H(\omega)_i^x \rangle_j^{T*})} \right)$$

FRAC 是在某个自由度上对频响函数进行比较的。同 MAC 一样, 数值为 1, 表示相关很好, 数值低, 表示相关差。 β 是被比较的两个频响函数之间可能的频率伸缩系数, 是整体刚度失配程度的一种量度。FRAC 的直接意义不明显, 但在模型修正过程中如果 FRAC 的值增大, 伴以 β 值趋向于 1, 这就清楚表示解析频响函数与实验频响函数之间的相关性在不断改善。

参考文献 a.6.35 定义 RVAC (输入自由度为 j) 如下:

$$(a.6.37) \quad \text{RVAC}(\omega_{i,j}) = \frac{||H(\omega_i)^a||_j^{T*} ||H(\omega_i)^x||_j|^2}{(||H(\omega_i)^a||_j^{T*} ||H(\omega_i)^a||_j) (||H(\omega_i)^x||_j^{T*} ||H(\omega_i)^x||_j)}$$

上式是只在—个频率 ω_i 上考察全部自由度的频响函数值。如果必要, 可以考虑伸缩系数 β 。RVAC 指出了解析模型与实验频响函数之间相关性好坏的频率范围。

RVAC 加以扩展可得 FDAC 频域置信准则: FDAC 是就 ω^a 和 ω^x 的所有可能组合来比较频响函数的值。参考文献 a.6.26 定义 FDAC (输入自由度为 j) 如下:

$$(a.6.38) \quad \text{FDAC}(\omega^a, \omega^x, j) = \frac{(\{H(\omega^a)^a\}_j^{T*} \{H(\omega^x)^x\}_j)}{||H(\omega^a)^a||_j ||H(\omega^x)^x||_j}$$

上面这个可供选择的公式考虑到了向量之间的相位关系。FDAC 比较的是频率为 ω^a 的解析振型与频率为 ω^x 的实验振型。在同一个频率上, FDAC 的值高, 表示实验频响函数与解析频响函数之间具有良好的相关性。

A.6.1.3.8 交叉正交性与混合正交性

这种方法以下面的模态正交性为根据 (参考文献 a.6.8):

$$(a.6.39) \quad \begin{aligned} [\Psi]^a [M] [\Psi]^a &= [m_r] \text{ 和} \\ [\Psi]^a [K] [\Psi]^a &= [k_r] \end{aligned}$$

交叉正交性是:

$$(a.6.40) \quad \begin{aligned} \text{COM}^{a-x} &= [\Psi]^a [M] [\Psi]^x \text{ 和} \\ \text{COK}^{a-x} &= [\Psi]^a [K] [\Psi]^x \end{aligned}$$

混合正交性是:

$$(a.6.41) \quad \begin{aligned} \text{MOM} &= [\Psi]^x [M] [\Psi]^x \text{ 和} \\ \text{MOK} &= [\Psi]^x [K] [\Psi]^x \end{aligned}$$

在相关较好的情形, 这些正交矩阵的非对角线元素的值相对于对角线元素来说是很小的。对这些正交性矩阵重新进行比例换算, 使对角线元素都等于 1, 那么非对角线元素的绝对值当不会超过 0.1。在实际情况下, 解析系统矩阵的压缩或实验模态振型的扩展对正交性常常带来影响, 常使正交性的解释不很清晰。

A.6.1.3.9 整体质量

对有限元模型的整体质量 (mass) 进行评估, 就是检查解析质量矩阵的好坏。

A.6.1.3.10 网点不一致性的影响

有限元模型网点与测量网点之间的一致性对于共振频率比较、整体质量检验以及频响函数的视觉检查等,都没有影响。对于 MAC 和 COMAC,只需考虑相互对应的自由度。对于正交性检验,必须将实验振型加以扩展或将解析系统矩阵进行压缩。扩展或压缩可能使相关性结果发生偏差。

A.6.1.3.11 小 结

本节讨论了一些最常用的相关技术。相关技术用以评估解析模型与实验模型之间的一致程度,从而决定是否有必要对解析模型进行修正。为了合理完整的认识解析数据和实验数据之间的相关性,要尽可能多采用几种相互并行的相关性检验方法。附录 AA.6.1 举例说明了几种相关性技术。

A.6.1.4 修正参数的选择

A.6.1.4.1 引 言

根据在修正阶段中将要用到的修正方法,可能必须事先选择修正参数,也可能不需要选择。修正参数是有限元模型或系统矩阵中定义的一个值,在修正阶段可加以改变。可选修正参数的类型决定于所采用的修正方法。下一节(A.6.1.5 节)说明,修正方法基本上有两种:直接修正法和以灵敏度为基础的迭代法。直接修正法采用闭式公式一步计算出修正后的系统矩阵。在直接修正过程中,解析系统矩阵的全部元素都是修正参数。以灵敏度为基础的迭代法在迭代过程中是对所选的一组参数加以修正。选择修正参数可以在不同的级别上进行。

本节首先讨论不同类型的参数,然后就修正后系统矩阵的质量及其可解释性对参数选择的结果予以评述,最后简短概述一下某些误差定位方法。误差定位方法是一些对策,对于检测解析模型中的不准确性可以提供极有价值的信息。

A.6.1.4.2 修正参数的不同类型

下列类型的修正参数可以使用:

- 整体系统矩阵中的独立元素;
- 描述整体系统矩阵中子矩阵按比例变化的参数;子矩阵例如可以是单元矩阵或描述结构某一有限部分的矩阵;
- 有限元模型的物理参数(即材料特性或几何特性)。

由于修正过程有许多步骤,每一步修正程序都必须与有限元程序交换数据,因此把有限元模型的物理参数作为修正参数的修正方法,操作起来有些复杂,但是这种修正方法所给出的修正矩阵模型很容易用物理意义明确的参数给予解释。相反,用子矩阵的比例换算或独立矩阵元素作为修正参数的修正方法做起来要容易得多。系统矩阵随这样的修正参数的变化很容易计算。这类修正方法不必与有限元程序密切联系,但所得修正后的矩阵不能根据物理意义明确的参数加以解释。在此情况下,修正后的解析模型无非是这样一个可与通过实验识别出来的模型相比较、反映某种动态特性的矩阵模型。这样一个矩阵模型要借助质量分布和刚度分

布来解释,虽不能说不可能,但却是十分困难的。因此,这样的矩阵,除在一定的频率范围内和实验设置的形态下描述有关结构的动特性之外,是不能用于其他目的的。

A.6.1.4.3 修正模型的正确性和可靠性

在矫正过程中,选择修正参数是关键性的一步。图 a.6.5 是一个略图,说明合理选择修正参数的重要性。

空间 S_1 代表描述结构动态特性的所有可能的数学模型。一个数学模型就是一个数学方程组,或线性或非线性,或连续或离散,按准确或近似的方式描述结构的动态特性。这些模型当中, M_{opt} 模型(不一定是有限元模型)能最好地描述结构的动特性。

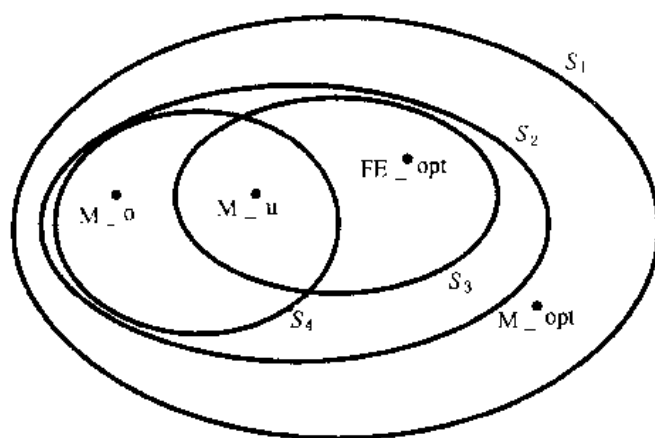


图 a.6.5 解析模型概略

空间 S_2 包含结构的所有可能的有限元模型,其中有一个 FE_{opt} 有限元模型是 M_{opt} 模型的最好近似。

空间 S_3 包含所有与实验数据有良好相关性的有限元模型, FE_{opt} 模型是 S_3 中的一员, S_3 是 S_2 的一个子空间。

空间 S_4 所含有的模型都可以通过不同的参数选择从原始有限元模型 M_o 导出。 S_4 是 S_2 的一个子空间。原始有限元模型 M_o 和修正后的模型 M_u 都是 S_4 的成员。 S_4 的大小由原始模型决定(在矫正阶段离散化情形将不会被改变),但主要决定于修正参数的选择。如果修正参数选得不好, S_4 与 S_3 将不会具有公共空间,因而将找不到与实验数据相关性较好的修正模型。如果修正参数选得很好,那么 FE_{opt} 将成为 S_3 和 S_4 的公共空间中的一员。于是,修正后的模型 M_u 是否收敛于 FE_{opt} 就决定于矫正方法。

对于大多数模型修正研究来说,只要 M_u 是 S_3 的一员就足够了。但是,如果修正后的模型要用在测量频率范围之外,或者用在另一种不同的测量设置形态下,那么使 M_u 尽可能接近 FE_{opt} 是非常重要的。仅仅是 S_3 中的一员,即仅仅与(有限的)实验数据组有比较好的相关性,还不能完全保证在其他频率范围和测量形态下解析模型和实验模型之间的良好对应性。

A.6.1.4.4 误差定位

选择修正参数是一件相当困难的工作。一般我们并不知道是有限元模型的哪些参数导致了与实验数据的相关性很差。如果修正参数选得过多,那么在矫正步骤所需要的 CPU 能力将急剧增加,并可能引起矫正过程中的病态数值计算问题。如果参数选的不够多,则会限制 S_4 空间的大小,可能使 FE_{opt} 甚至所有 S_3 成员都被从 S_4 排除出去。

不少文献提出了一些方法,即所谓误差定位法,为修正参数的选择提供了有益的信息。下面我们将简述一下其中的几种方法。关于这些方法的有效性的详尽阐述与讨论,可在有关文

献中找到(参考文献 a.6.9, a.6.10, a.6.11)。尽管误差定位方法给出了一些关于选择修正参数的指示,然而使用者自己的经验和工程判断力,依然是恰当选择修正参数的根本基础。

共位模态置信准则

因为 COMAC(见 A.6.1.3.5 节;相关技术)是一个自由度一个自由度地计算解析模态振型和实验模态振型之间的对应性的,所以 COMAC 值较低的自由度可以被认为是有限元模型不准确的表示。虽然 COMAC 值给出的误差指示决定于模态振型的比例换算,并且不总是那么可靠,但这种方法还是常用,因为 COMAC 值容易计算。

误差矩阵法

误差矩阵法(参考文献 a.6.12)近似计算解析系统矩阵和(未知)实验系统矩阵之间的差。现就刚度矩阵推导如下:

$$(a.6.42) \quad [\Delta K] = [K]^x - [K]^a,$$

重新整理并取逆,得:

$$(a.6.43) \quad \begin{aligned} [K]^x &= ([K]^a + [\Delta K])^{-1} \\ &= [K]^a \left(\left[\begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{array} \right] + [\Delta K][K]^a \right)^{-1} \\ &\approx [K]^a \left(\left[\begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{array} \right] - [\Delta K][K]^a \right) \end{aligned}$$

将 $[\Delta K]$ 分离出来,并将 $[K]^x$ 代之以下述正交条件:

$$(a.6.44) \quad [K]^x \approx [\Psi]^x \left[\begin{array}{c} 1 \\ K_r^x \\ \vdots \end{array} \right]^{-1} [\Psi]^x{}^T,$$

则得:

$$(a.6.45) \quad [\Delta K] \approx [K]^a \left([K]^a - [\Psi]^x \left[\begin{array}{c} 1 \\ K_r^x \\ \vdots \end{array} \right]^{-1} [\Psi]^x{}^T \right) [K]^a.$$

误差质量矩阵的推导与此类似。

这种方法也可以看成是直接矩阵矫正法。实验模态数据的不完整性和测量网点的不一致性,严重影响了这种方法的应用。

力平衡法

力平衡法(参考文献 a.6.13)计算残余力向量:

$$(a.6.46) \quad \{F\}_r = ([K]^a - \omega_r^2 [M]^a) \{\Psi\}_r.$$

未处于力平衡状态的自由度表示有限元模型中的不准确性。同样,网点的不一致性限制了这种方法的正确性和可解释性。

灵敏度方法

有的文献提出了寻找最敏感参数的一些方法(参考文献 a.6.10)。如果模态参数或系统矩阵对某一个参数的第一阶偏导数的绝对值较大,就说这个参数是敏感的。使有限元模型迅速收敛于跟实验数据良好相关的修正模型,选择这样一组最敏感参数是最好不过的。但是必须指出,在大多数情况下,最敏感参数组与反映有限元模型的不准确性的修正参数组从整体上

看是不同的。因为在修正研究中,修正模型被应用的频率范围和形态不同于实验设置的频率范围和形态,所以仅仅选择最敏感参数是得不到有实际意义的结果的。不过这种方法还是常用的,因为大多数有限元程序都提供有灵敏度计算功能。

A.6.1.4.5 小 结

本节讨论了修正参数的选择问题。在矫正阶段修正参数是改变的。我们已经说明,选择修正参数是模型修正成功的关键。修正模型的可解释性、正确性及可靠性极大地依赖所选修正参数组的构成。

文献提出了许多方法,为检测有限元模型中的不准确性提供了有益的信息。然而,选择合理的修正参数组主要还是依靠专业人员的经验和工程判断能力。附录 AA.1.6 对某些方法给予了演示说明。

A.6.1.5 矫正方法

A.6.1.5.1 引 言

模型修正过程的最后一步是对解析模型进行矫正,为修正参数计算新值。将这些修正后的值引入有限元模型,以得到与实验动态数据相关良好的解析动态参数。

过去的十年中,有众多的矫正方法见诸文献。从所谓的直接矫正法到迭代法,到灵敏度法,我们可以看到其演变过程。直接法计算修正后的系统矩阵,一次完成。系统矩阵的全部元素都是可变的。以灵敏度为基础的矫正法根据截取的泰勒展开式,可使迭代过程中所选取的修正参数最佳;泰勒展开式将模态参数、系统矩阵或有关特性表示为修正参数的函数。评述这一演变过程的广泛研究和对比研究文献已经出版(参考文献 a.6.9 和 a.6.14)。本节先简单概述一下直接法的基础知识,而后讨论迭代矫正法。

本节还将对网点不一致性予以概括。解析和实验矩阵及向量被认为具有相同的维数。但是应当记住,网点不一致性是成功应用矫正法的主要障碍。

A.6.1.5.2 直接矫正法

直接矫正法在下列一个或几个方程被满足的基础上(注角^u表示修正后的矩阵)对解析系统矩阵一步完成优化:

- 在共振点的运动方程:

$$(a.6.47) \quad ([K]^u - \omega_r^2 [M]^u) \{\Psi\}_r^u = \{0\}$$

- 正交性条件:

$$(a.6.48) \quad \{\Psi\}_r^u [M]^u \{\Psi\}_r^u = \begin{bmatrix} 1 & \\ & m_r^u \end{bmatrix} \text{ 和} \\ \{\Psi\}_r^u [K]^u \{\Psi\}_r^u = \begin{bmatrix} 1 & \\ & k_r^u \end{bmatrix}$$

- 对称条件:

$$(a.6.49) \quad [M]^u - [M]^u{}^T = [0] \\ [K]^u - [K]^u{}^T = [0]$$

直接矫正法会受到实验模态数据不完整性的影响,特别是应用正交性条件时更是如此。直接矫正法成功在很大程度上视情况而定。正如我们以前所提到的,系统矩阵的全部元素都是可变的这一事实会导致修正后的矩阵不能用物理意义明确的参数加以解释。

本节将较为详细地讨论几种直接矫正方法。我们的说明只是例证性的,远不完整。我们将讨论的这许多方法以及不同于直接矫正法的其他一些方法,可以在文献 a.6.15 和 a.6.16 中找到。

Lagrange 乘子

应用 Lagrange 乘子(参考文献 a.6.17, a.6.18 和 a.6.19)的直接矫正法把修正后解析矩阵与原始解析矩阵之间的加权距离缩小到最小:

$$(a.6.50) \quad \begin{aligned} \epsilon_M &= \| [M]^{-0.5}([M]^u - [M])[M]^{-0.5} \| \text{ 和} \\ \epsilon_K &= \| [K]^{-0.5}([K]^u - [K])[K]^{-0.5} \| . \end{aligned}$$

前面提到的几个方程((a.6.47)式到(a.6.49)式)用做约束方程。

例如, Berman 法为了计算修正后的质量矩阵,把(a.6.48)式当作为一个约束方程,而把(a.6.50)式作最小化处理。Lagrange 函数写成如下形式:

$$(a.6.51) \quad \mathcal{L}_M = \epsilon_M + \sum_{i=1}^{N_m^*} \sum_{j=1}^{N_n^*} \lambda_{ij} \left([\Psi]^x T [M] [\Psi]^x - [I] \right)_{ij}$$

式中 $[\Psi]^x$: 假定是质量规格化矩阵;

$(\cdots)_{ij}$: 表示一矩阵的第 i 行第 j 列的元素;

λ_{ij} : 元素 (i, j) 的 Lagrange 乘子。

将 \mathcal{L}_M 最小化,得:

$$(a.6.52) \quad \begin{aligned} [M]^u &= [M] + [M][\Psi]^x ([\Psi]^x T [M] [\Psi]^x)^{-1} \times \\ &\quad \left([I] - [\Psi]^x T [M] [\Psi]^x \right) \times ([\Psi]^x T [M] [\Psi]^x)^{-1} [\Psi]^x T [M] \end{aligned}$$

关于刚度矩阵, (a.6.50) 式和 (a.6.47) 、(a.6.47.b) 及 (a.6.49.b) 式相结合得:

$$(a.6.53) \quad \begin{aligned} \mathcal{L}_K &= \epsilon_K + \sum_{i=1}^{N_m^*} \sum_{j=1}^{N_n^*} \lambda_{ij}^k \left([K][\Psi]^x - [M][\Psi]^x \left[\omega_r^2 \right] \right)_{ij} + \\ &\quad \sum_{i=1}^{N_m^*} \sum_{j=1}^{N_n^*} \lambda_{ij}^0 \left([\Psi]^x T [K] [\Psi]^x - \left[\omega_r^2 \right] \right)_{ij} + \sum_{i=1}^{N_m^*} \sum_{j=1}^{N_n^*} \lambda_{ij}^s ([K] - [K]^T)_{ij} . \end{aligned}$$

将 \mathcal{L}_K 最小化可得:

$$(a.6.54) \quad [K]^u = [K] + [\Delta K] + [\Delta K]^T,$$

$$\begin{aligned} \text{式中 } [\Delta K] &= 0.5 \times [M]^u [\Psi]^x \left([\Psi]^x T [K] [\Psi]^x + \left[\omega_r^2 \right] \right) [\Psi]^x T [M]^u - \\ &\quad [K][\Psi]^x [\Psi]^x T [M]^u . \end{aligned}$$

正交法

为了计算实验系统矩阵的逆矩阵,以正交性为根据的矫正方法要用正交条件的逆矩阵。由于实验模态数据的不完整性,只能得到近似值:

$$(a.6.55) \quad [M]^{*-1} \approx [\Psi]^x [\backslash m_{r\backslash}^x]^{-1} [\Psi]^x{}^T \text{ 和} \\ [K]^{*-1} \approx [\Psi]^x [\backslash k_{r\backslash}^x]^{-1} [\Psi]^x{}^T.$$

误差矩阵法(见 A.6.1.4.4 节)就可以看成是这样一种方法。另一种方法是矩阵混合法(参考文献 a.6.20):

$$(a.6.56) \quad [K]^{*-1} = [K]^{-1} + \left\{ [\Psi]^x [\backslash k_{r\backslash}^x]^{-1} [\Psi]^x{}^T - [\Psi]^a [\backslash k_{r\backslash}^a]^{-1} [\Psi]^a{}^T \right\},$$

这里, $[\Psi]^a$ 是仅与实验模态振型相对应的一组解析模态振型。同样的方法可用于质量矩阵。

矩阵摄动法

这种直接矫正法(参考文献 a.6.21)是以下列一套描述矩阵摄动理论的方程开始的:

$$(a.6.57) \quad [M]^* = [M]^a + [\Delta M] \text{ 和} \\ [K]^* = [K]^a + [\Delta K],$$

$$(a.6.58) \quad [\Psi]^* \approx [\Psi]^a + [\Delta \Psi], [\Delta \Psi] = [\Psi]^a [\rho] \text{ 和} \\ [\backslash \omega_{r\backslash}^2]^* = [\backslash \omega_{r\backslash}^2]^a + [\backslash \Delta \omega_{r\backslash}^2].$$

其中, $[\rho]$ 是对角线元素为零的一个矩阵。将上述这些方程代入正交条件 (a.6.48) 式可得:

$$(a.6.59) \quad [\Delta M] = [M][\Psi]^a \left(2[\backslash I_{\backslash}] - [\Psi]^a{}^T [M][\Psi]^* - [\Psi]^x{}^T [M][\Psi]^a \right) [\Psi]^a{}^T [M], \\ (a.6.60) \quad [\Delta K] = [M][\Psi]^a \times \\ \left([\backslash \omega_{r\backslash}^2]^a + [\backslash \omega_{r\backslash}^2]^* - [\Psi]^a{}^T [K][\Psi]^* - [\Psi]^x{}^T [K][\Psi]^a \right) [\Psi]^a{}^T [M],$$

式中 $[\Psi]^x$ 和 $[\Psi]^a$ 假定已质量规格化。

A.6.1.5.3 以灵敏度为基础的迭代法

以灵敏度为基础的迭代矫正法使表示实验数据和解析数据之差的残余矩阵 $[\epsilon]$ 的范数最小化。矩阵 $[\epsilon]$ 是由下列特定残余项组成的:

- 解析共振频率和实验共振频率的(相对)差,
- 解析振型和实验振型之间的差,
- 混合正交矩阵的非对角线元素,
- 某一特定频率上的力平衡,
- 解析频响函数和实验频响函数之间的差,
- 解析总质量和实验总质量之间的差。

用一阶泰勒展开式将这些残余项表示为修正参数 $\{u\}$ 的一个函数:

$$(a.6.61) \quad \epsilon(\{u\}) = \epsilon(\{u^0\}) + \sum_{i=1}^{N_u} \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial u_i} \Delta u_i \right),$$

其中, N_u 是修正参数的数目。一阶偏导数就是所谓的灵敏度, 可以通过数值方法进行计算。

由于施行了线性化, 迭代过程一直继续下去, 直到残余向量的范数足够小为止, 便实现了最小化。

当今,建立在灵敏度基础上的迭代法远较直接矫正法常用。残余向量的最优构成取决于可以利用的实验数据的量及精度。在大多数情况下,优先考虑的是共振频率差和频响函数差相结合。迭代矫正法再加上修正参数的适当选择,就能使修正后的有限元模型更可靠。

残余向量组成

本节首先概述残余向量和线性化所需要的第一阶灵敏度的各种可能的组成,然后对最小化问题的解决方案将给予评述。

所有残余向量的第一阶灵敏度都是建立在系统矩阵的第一阶灵敏度 $\frac{\partial[M]}{\partial u_i}$ 和 $\frac{\partial[K]}{\partial u_i}$ 的基础上的。系统矩阵的这些一阶灵敏度可通过有限差进行数值近似计算。下面的残余量可用以构成整体残余向量。

(1) 共振频率的(相对)差

$$(a.6.62) \quad \epsilon_{\omega_r} = \frac{\omega_r^a - \omega_r^x}{\omega_r^x},$$

$$(a.6.63) \quad \frac{\partial \epsilon_{\omega_r}}{\partial u_i} = \frac{1}{\omega_r^x} \frac{\partial \omega_r^a}{\partial u_i},$$

$$(a.6.64) \quad \frac{\partial \omega_r^a}{\partial u_i} = \frac{1}{2m_r \omega_r^a} \left\{ \Psi_r^a \left(\frac{\partial[K]}{\partial u_i} - \omega_r^{a2} \frac{\partial[M]}{\partial u_i} \right) \right\} \Psi_r^a. \text{ (见 A.5.2.2 节)}.$$

共振频率残余用起来很容易(参考文献 a.6.22),它不受网点不一致性的影响。一般,实验得出的共振频率是可以使用的最准确的实验数据,它们是一种整体度量,但不含有任何空间信息。

(2) 解析模态振型与实验模态振型之间的差

$$(a.6.65) \quad \epsilon_{\Psi_r} = \{ \Psi_r^a - \{ \Psi_r^x \}.$$

这两种模态振型必须按同样的方法进行比例换算。一阶灵敏度用它在所有计算得出的解析模态振型的基上的投影来近似(见 A.5.2.2 节)。

使用模态振型差的不利之处在于,计算灵敏度多少要花一些时间,实验模态振型有时太不准确,不能用作参考数据。实验模态振型的比例换算并不总是那么清晰明了。

(3) 混合正交性的非对角线元素

$$(a.6.66) \quad \epsilon_{\dot{M}OM} = \{ \Psi_s^x \}^T [M] \{ \Psi_v^x \} \text{ 和}$$

$$\epsilon_{\dot{M}OK} = \{ \Psi_s^x \}^T [K] \{ \Psi_v^x \}, (s \neq v)$$

$$(a.6.67) \quad \frac{\partial \epsilon_{\dot{M}OM}}{\partial u_i} = \{ \Psi_s^x \}^T \frac{\partial[M]}{\partial u_i} \{ \Psi_v^x \} \text{ 和}$$

$$\frac{\partial \epsilon_{\dot{M}OK}}{\partial u_i} = \{ \Psi_s^x \}^T \frac{\partial[K]}{\partial u_i} \{ \Psi_v^x \}$$

使用混合正交性的缺点是,它们对扩展或压缩过程中所引入的误差特别敏感(参考文献 a.6.22)。

(4) 力平衡

$$(a.6.68) \quad \{ \epsilon_F \} = ([K] - \omega_r^2 [M]) \{ \Psi_r^x \} \text{ (参考文献 a.6.14),}$$

$$(a.6.69) \quad \frac{\partial \{\epsilon_{f_r}\}}{\partial u_i} = \left(\frac{\partial [K]}{\partial u_i} - \omega_r^2 \frac{\partial [M]}{\partial u_i} \right) \{\Psi\}_r^x.$$

关于参考自由度为 v 、频率为 ω_j 的强迫振动,可以写出类似的关系式(参考文献 a.6.23):

$$(a.6.70) \quad \{\epsilon_{f_j}\} = \{1\}_v - ([K] - \omega_j^2 [M]) \{H(\omega_j)\}_v^x,$$

其中, $\{1\}_v$ 是个向量,对于参考自由度 v 它等于 1,对于所有其他自由度则等于 0.

$$(a.6.71) \quad \frac{\partial \{\epsilon_{f_j}\}}{\partial u_i} = - \left(\frac{\partial [K]}{\partial u_i} - \omega_j^2 \frac{\partial [M]}{\partial u_i} \right) \{H_j\}_v^x.$$

力平衡法对于实验数据的不准确性也是非常敏感的。

(5) 解析频响函数与实验频响函数之差

$$(a.6.72) \quad \{\epsilon_H\} = \{H(\omega_j)\}_v^a - \{H(\omega_j)\}_v^x.$$

可以证明, $\{\epsilon_H\}$ 的一阶泰勒展开式的有效性极其有限(参考文献 a.6.23)。更稳定的线性化是根据方程式(a.6.70)进行的。以 $[H_j]^a$ 左乘 (a.6.70) 式,得:

$$(a.6.73) \quad \begin{aligned} [H_j]^a \{\epsilon_{f_j}\} &= [H_j]^a \{1\}_v - [H_j]^a ([K] - \omega_j^2 [M]) \{H_j\}_v^x \\ &= \{H_j\}_v^a - \{H_j\}_v^x \\ &= \{\epsilon_H\}, \end{aligned}$$

$$(a.6.74) \quad \begin{aligned} \{\epsilon_{H_i}^{lin}\} &= [H_j]^a \{\epsilon_{f_j}(\{u^o\})\} + [H_j]^a \sum_{i=1}^{N_u} \left(\frac{\partial \epsilon_{f_j}}{\partial u_i} \Delta u_i \right), \\ &= \{\epsilon_{H_j}(\{u^o\})\} + \sum_{i=1}^{N_u} \left([H_j]^a \frac{\partial \epsilon_{f_j}}{\partial u_i} \Delta u_i \right). \end{aligned}$$

方程 (a.6.74) 式用起来相当得力,因为它按一种合理稳定的方式将所有实验信息结合在了一起。但是,选择 ω_j 以及为解决解析、实验频响函数之间的阻尼不一致性而选择适当方案,却不是那么直截了当(参考文献 a.6.24)。

(6) 解析总质量和实验总质量之间的差

$$(a.6.75) \quad \epsilon_m = m^a - m^x,$$

式中 m^x : 结构的质量;

$$m^a = \{R\}^T [M] \{R\};$$

$\{R\}$: 描述刚体加速度为 1 m/s^2 的向量。

一阶灵敏度很容易求出:

$$(a.6.76) \quad \frac{\partial \epsilon_m}{\partial u_i} = \{R\}^T \frac{\partial [M]}{\partial u_i} \{R\}.$$

质量差并不常用。

(7) 参数改变

修正参数 $\{u\}$ 的改变量,并不是残余向量,残余向量的意义在于:使之最小化就可以改善解析数据和实验数据之间的相关性。尽管如此,有时在残余向量中还是引入参数改变量,这是因为 $\{\Delta u\}$ 的范数的最小化表示使用者对修正参数的初始值 $\{u^o\}$ 是有信心的(参考文献 a.6.22)。

$$(A.6.77) \quad \{\epsilon_u\} = \left\{ \frac{\Delta u_i}{u_i^0} \right\}.$$

最小化问题

整体残余向量 $\{\epsilon\}$ 是由某些专门线性化的残余函数构成的。通过对 $\{\epsilon\}$ 的范数的最小化:

$$(A.6.78) \quad \min \|\{\epsilon\}\|,$$

可以找到最佳参数变化量 $\{\Delta u\}$ 。

这种线性最小化问题可以用各种不同方式表述与解决。常用的方法是:最小二乘法, Bayes 估计法, 线性规划及二次规划。有一些残余向量分量常常不予最小化, 而被看做带有上下限的约束条件。为了反映使用者对各种修正参数的信赖程度以及不同残余成分的相对重要性, 可以加上加权系数(参考文献 a.6.22)。

A.6.1.5.4 小结

本小节讨论了两钟不同类型的矫正方法: 直接矫正法和以灵敏度为基础的迭代矫正法。

直接矫正法是计算修正后的系统矩阵, 一次完成。修正参数组由解析系统矩阵的全部元素组成。直接矫正法的正确性是因人而异的。

建立在灵敏度基础上的迭代法, 是为选定的一组修正参数计算出修正值。在迭代过程中, 表示解析模型与实验数据之差的整体残余向量被最小化。整体残余向量构成的最佳选择也是视情况而定的。恰当选择修正参数, 以灵敏度为根据的迭代矫正法可得到可靠的、物理意义明确的修正过的解析模型。

A.6.1.6 小结

本节概略总结了模型修正技术和与之有关的问题。模型修正对于获得描述机械结构动力学特性的可靠的有限元模型, 是个强有力的工具。然而, 任何方法都不是放之四海而皆准的。

本节还讨论了网点的不一致性和实验数据的不完整性。其他一些问题是实验数据的精度、实验数据中固有的但却难以包含在模型中的阻尼等。

尽管有这样那样的障碍, 模型修正技术对于验证并矫正动力学有限元模型仍是多助的工具。

A.6.2 预试验分析

A.6.2.1 引言

准备一个模态分析试验时, 试验工程师应当考虑有关试验结构的一切可用知识, 其中包括试验目的、所要求的数据(频响函数或模态参数)、测量结果的必需精度等信息。进一步的知识可从经验、从以前做过的类似结构的试验、或从被试结构的有限元模型获得。下面几节将叙述一些应用这类信息的系统化工具, 以便确定所要求的频率范围以及激励点、响应点和悬挂固定点的最佳或次佳位置。

从实践角度看, 一个好的试验设计应符合下面的一些准则(参考文献 a.6.27)。这些准则

的相对重要性取决于试验目的。

(1) 对应性: 测量出来的模态应与实际存在的模态相对应, 遗憾的是后者是未知的。然而以前所做的类似结构的试验或有限元模型使我们能够估计实际存在的模态。进一步讲, 我们所设计的试验应当得出清晰可辨的模态振型。模态振型的这种独立性与模态向量矩阵 $[\Psi_A]$ 的秩有着密切关系, 这里下标 A 表明是从完整的模态向量矩阵 $[\Psi]$ 中选择出来的(有效)自由度。这些仅限于有效自由度的模态向量的独立性, 可以通过比较完整模态向量组和简化模态向量组的 MAC 矩阵(见 A.6.1.3.4 节)来加以量度。完整模态向量组 MAC 矩阵的对角线值都很小, 则完整模态向量组被认为是独立的。简化组的 MAC 矩阵对角线值应当与完整组类似。

(2) 激励: 试验设计应包括一套激励装置, 以保证能够激出所有有关模态。

(3) 识别: 实测数据应包括识别有关参数所必需的信息。因此, 试验目的不同(例如控制或探伤), 试验设计也会不同。

(4) 观察: 实践上, 工程师要会观察这些模态振型, 通过视觉判断模态的精度, 并将直观结果与数学计算结果相比较。观察, 对于向其他设计者解释可能出现的差异也是很重要的。

(5) 鲁棒性: 由于试验设计是根据以前的试验模型或有限元模型进行的, 而这两种模型都有误差, 因此设计的试验应当是稳健的, 就是说对模型的误差不要太敏感, 要留有必要的冗量。

(6) 可达性: 所选响应及激励自由度应当易于触及操作。

有许多方法可(部分地)帮助工程师实现上述准则。后面几节讨论的方法虽不完整, 但很实用。

A.6.2.2 频率范围

试验的频率范围常常在试验说明中给出。有时试验说明中可能有这样的叙述, 例如: “要测出前 10 阶基本模态。”这时我们可以比较类似结构的试验, 或比较有限元模型, 即可确定频率范围。当然, 工程师要考虑一定的安全余量。假如试验结果要用于耦合结构的分析, 那么根据模态综合法(见 A.5.3.2.1 节), 要测量的频率范围应当比集成系统的临界频率范围宽得多。

A.6.2.3 响应点的选择

A.6.2.3.1 以矩阵 $[\Psi_A]$ 的秩为根据的方法

Kammer 提出了一种方法, 可以确定每一个候选响应点对模态向量矩阵 $[\Psi_A]$ 的秩有多大贡献(参考文献 a.6.28)。矩阵 $[\Psi_A]$ 的秩就等于矩阵 $[[\Psi_A]^T[\Psi_A]]$ 的秩(Fisher 信息矩阵)。根据 $[[\Psi_A]^T[\Psi_A]]$ 的特征值和特征向量 $[\Psi]$ 和 $[\Gamma_A]$, Kammer 证明, 每个保留自由度 i 对 Fisher 信息矩阵秩的贡献由“有效独立指标” Efi 给出:

$$\begin{aligned} (a.6.79) \quad Efi_i &= \text{diag}_i([\Psi_A][\Psi][\Gamma_A]^{-1}[\Psi]^T[\Psi_A]^T) \\ &= \text{diag}_i([\Psi_A][[\Psi_A]^T[\Psi_A]]^{-1}[\Psi_A]^T) \end{aligned}$$

用迭代法消去 Efi 值最低的自由度, 重新计算新的 Efi 值, 这个过程将产生不依赖于目标模态向量的一组最佳响应自由度。

Hemez(参考文献 a.6.29)证明,如果模态分析的目的是检测并确定大型柔性结构的受损部位,那么就要对结构上具有高负荷承载能力的这些部分予以强调。因此 Hemez 提出采用应变能分布 $[\Psi_A]^T [K] [\Psi_A]$ 作为 Fisher 信息矩阵。

Schedlinski 和 Link(参考文献 a.6.31)根据模态向量矩阵 $[\Psi]^T$ 的 $Q-R$ 分解制定了一种方法,使响应传感器的位置最佳:

$$(a.6.80) \quad [\Psi]^T [E] = [Q][R]$$

式中 $[E]$:置换矩阵,使 $[\Psi]^T$ 的各列交换位置;

$[Q]$:正交矩阵($[Q]^T [Q] = [I]$);

$[R]$:对角线元素递减的上三角矩阵。

Schedlinski 和 Link 证明, $[\Psi]^T [E]$ 的列之间的线性无关性可由 $[R]$ 对角线元素的值来度量,从而说明 $[\Psi]^T [E]$ 的前若干列包含着“最线性无关”的向量。照此方法,可选适当的模态数 N_m 及响应点来规定线性无关模态向量。比较压缩后的与原本完整的模态振型向量组的 MAC 矩阵,就可以度量模态向量的无关性程度(模态向量限制为 N_m 个有效自由度)。

A.6.2.3.2 将初始响应组减至最小的方法

De Clerck 和 Avitable (参考文献 a.6.30)以相对较为简单的方程阐述了一些预试验评估方法。模态振型求和图(MSSP)以直方图形式就所有保留自由度 i 画出了下式的值:

$$(a.6.81) \quad \text{MSSP}_i = \sum_{j=1}^{N_m} |\Psi_{ij}|.$$

在直方图中,每一项 Ψ_{ij} 的贡献量均用不同颜色予以强调(图 a.6.6)。假如最好或较好的全部模态都画在直方图上的话,那么 MSSP 值高的自由度表明为试验响应点的有望候选者。

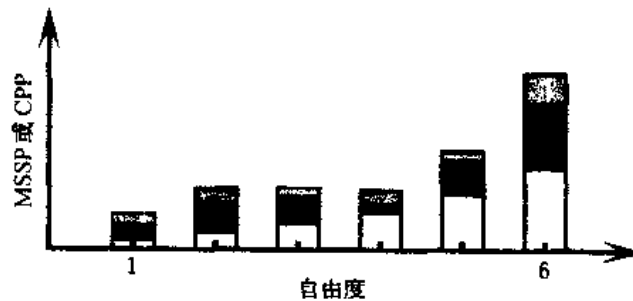


图 a.6.6 典型的 MSSP 或 CPP 图(6 个自由度和 3 个模态)

互正交预试验图(CPP)考虑模态有效质量,是以质量换算模态 $[\Psi]^T [M] = [\Psi_M]^T$ 为根据的,而 $[\Psi]^T [M] = [\Psi_M]^T$ 是互正交性的一部分,正如 A.6.1.3.8 节所定义。如果根据系统等效压缩及扩展处理(SEREP)来压缩质量矩阵

$$(a.6.82) \quad [\Psi_M]^T \approx [\Psi]^T [M] \approx [\Psi]^+,$$

那么,就所有自由度 i 将下式的值画成的直方图就是 CPP 图:

$$(a.6.83) \quad \text{CPP}_i = \sum_{j=1}^{N_m} |\Psi_{Mij}|.$$

同 MSSP 一样,每项 Ψ_{Mij} 贡献量都以不同颜色加以强调(图 a.6.6)。同时,其解释也类似于

MSSP: 如果将最好或较好的全部模态都画在 CPP 图上, 则 CPP 高的自由度最有望被选做响应点。

当系统矩阵压缩到选定的自由度数时, MSSP 和 CPP 都给不出关于模态独立性的什么信息。模态向量被限于所选择的自由度时, 其独立程度可以通过比较完整模态向量组和压缩模态向量组的 MAC 矩阵来度量。

A.6.2.3.3 初始响应组扩展为次佳响应组的方法

Carne 和 Dohrmann(参考文献 a.6.27)根据 MAC 提出了一种相当实用的方法。符合 A.6.2.1 节提到的视觉要求(只在三轴测量中最为常见)的最小自由度组, 要加以扩展以便也满足无关性及对应性要求。无关性的度量是 MAC:

$$(a.6.84) \quad MAC_{ij} = \frac{([\Psi_A]^T[\Psi_A])_{ij}([\Psi_A]^T[\Psi_A])_{ij}}{([\Psi_A]^T[\Psi_A])_{ii}([\Psi_A]^T[\Psi_A])_{jj}}$$

如果 $i = j$, 则 MAC 的值应当是 1; 如果 $i \neq j$, 则 MAC 值对于不相关的模态向量应当很小。

将自由度 k 加到 $[\Psi_A]$ 中去, MAC 就变为:

$$(a.6.85) \quad MAC_{ij} = \frac{(([\Psi_A]^T[\Psi_A])_{ij} + \Psi_{Ak} \Psi_{Akj})(([\Psi_A]^T[\Psi_A])_{ij} + \Psi_{Ak} \Psi_{Akj})}{(([\Psi_A]^T[\Psi_A])_{ii} + \Psi_{Ak} \Psi_{Aki})(([\Psi_A]^T[\Psi_A])_{jj} + \Psi_{Akj} \Psi_{Akj})}$$

此式说明, 估计一个附加自由度的影响所需的计算量是很小的。在迭代过程中, 要在响应自由度组中加入能导致最小非对角 MAC 值的敏感器。Carne 和 Dohrmann 提出了两种方法: 每一步迭代, 或者跟踪所有非对角 MAC 值, 或者只跟踪最大非对角 MAC 值。

A.6.2.4 激励点的选择

选择激励点的位置, 最显然的方法是以对驱动点留数(DPR)的研究为依据的。留数 A_{ijr} 借助模态参数由下面的频响函数表达式定义:

$$(a.6.86) \quad H_{ij}(j\omega) = \sum_{r=1}^N \left(\frac{Q_r \Psi_{ir} \Psi_{jr}}{(j\omega - \lambda_r)} + \frac{Q_r^* \Psi_{ir}^* \Psi_{jr}^*}{(j\omega - \lambda_r^*)} \right), \text{ 或}$$

$$H_{ij}(j\omega) = \sum_{r=1}^N \left(\frac{A_{ijr}}{(j\omega - \lambda_r)} + \frac{A_{ijr}^*}{(j\omega - \lambda_r^*)} \right).$$

在纯模态情况下, 若按单位模态质量换算, 模态比例系数则为(见 A.1.2.8 节):

$$(a.6.87) \quad Q_r = 1/(j2\omega_r).$$

因此, 驱动点留数($i = j$)为:

$$(a.6.88) \quad A_{jir} = (\Psi_{jr}^2)/(j2\omega_r).$$

就所有待选激励点和所有关心的模态仔细研究一下驱动点留数(即观察最大值、平均值、最小值或加权平均值(加权平均值 = 平均值 \times 最小值)……), 可以得到关于选择激励自由度的许多信息。通常, 某(些)自由度对于尽可能多的模态, 其 DPR 值都大, 这样的自由度就是比较好的激励点。

Schedlinski 和 Link(参考文献 a.6.31)根据 $[\Psi_A]^T[M_A] = [F_A]^T$ 矩阵的 $Q - R$ 分解规定了一种方法来优化激励位置。之所以选择这样的驱动力函数, 是因为对于比例阻尼情形很容

易证明, $[F_A]$ 的第 j 列只能激出系统的第 j 个模态。以注脚 A 表示的这组有效自由度是从前面的预试验阶段(A.6.2.3节)得出的那组响应自由度。最佳或次佳激励点选择方法类似于A.6.2.3.2节描述的 $Q-R$ 分解法。这种方法更加强调这样的事实:如此选择的激励点激励系统时模态比较容易分辨。

用以评价激励自由度是否合适的一个较好的办法是利用模态指示函数(MIF)或复模态指示函数(CMIF)。

复模态指示函数作为一种模态参数识别工具,我们在A.3.5.5节已经讨论过。模态指示函数是利用公式 $[H(j\omega)] = [P(j\omega)]^{-1} [S(j\omega)] [R(j\omega)]$, 把频响函数的奇异值作为频率的函数画在对数刻度幅值图上。该图在共振频率点处会出现峰值。如果根据所选的输入和输出将频响函数矩阵当作计算CMIF的基础,那么CMIF应当在所有有关的(有限元)共振点呈现出峰值(重根应当由在同一个共振频率上达到峰值的多重奇异值检测)。Avitable, Haselton 和 Moore(参考文献 a.6.32)提出了一种方法,是把与一组待选的激励位置相对应的全部频响函数矩阵 $[H]$ 都测出来(或从有限元模型推导出来)。计算这个完整矩阵的CMIF值,即可确定必需的激励点数。然后把激励位置待选组分成分若干小组,考察其CMIF,便能找到一组合适的激励点。

模态指示函数(MIF)是频域函数,在纯模态的共振频率处呈现局部最小值(参考文献 a.6.33, a.6.34)。对于给定的一组数据,模态指示函数的数目最多等于激励点数。第一模态指示函数在所有共振频率点上呈出局部最小值。理论上,第二模态指示函数(如果可用)只在二重根频率上具有局部最小值,第三模态指示函数只在三重根频率上具有局部最小值,如此等等。

模态指示函数根据的事实是:纯模态情况下,在共振频率处,结构的谐波响应滞后激励力 90° 。考虑频域的输入($\{F\}$)输出($\{X\}$)方程:

$$(a.6.89) \quad \{X\} = [H]\{F\}, \text{ 或 } \operatorname{Re}\{X\} + j\operatorname{Im}\{X\} = (\operatorname{Re}[H] + j\operatorname{Im}[H])\{F\},$$

其中 $[H]$ 是频响函数矩阵。假定力是实值的,因为在共振频率处响应滞后力 90° , 所以响应的实部 $\operatorname{Re}\{X\}$ 在响应总长度中所占份额必然最小:

$$(a.6.90) \quad \min_{\{F\}} \left(\frac{\operatorname{Re}\{X\}^T \operatorname{Re}\{X\}}{\operatorname{Re}\{X\}^T \operatorname{Re}\{X\} + \operatorname{Im}\{X\}^T \operatorname{Im}\{X\}} \right) = \mu, \text{ 或}$$

$$(a.6.91) \quad \min_{\{F\}} \left(\frac{\{F\}^T \operatorname{Re}[H]^T \operatorname{Re}[H] \{F\}}{\{F\}^T \operatorname{Re}[H]^T \operatorname{Re}[H] \{F\} + \{F\}^T \operatorname{Im}[H]^T \operatorname{Im}[H] \{F\}} \right) = \mu.$$

这等效于寻找下式的最小特征值 μ_{\min} 和对应特征向量 $\{F_{\min}\}$:

$$(a.6.92) \quad [\operatorname{Re}[H]^T \operatorname{Re}[H]] \{F\} = [\operatorname{Re}[H]^T \operatorname{Re}[H] + \operatorname{Im}[H]^T \operatorname{Im}[H]] \{F\} \mu.$$

该最小特征值作为频率的函数的图形就是第一模态指示函数。在当前激励点激励出来的纯模态频率上,第一模态指示函数的值会急剧下降。第二最小特征值如果在同样的频率上急剧下降,表示该频率上有重根存在。

A.6.2.5 支承点的选择

如果试验的目的是在自由-自由条件下将实验结果与有限元模型进行比较,那么理论上,被试结构的边界条件对其动态特性不应有什么影响,这就要求支撑非常柔软,而且连接点的运动幅度要很小。后一个条件与对激励点的要求正相反。所以上节所讨论的方法特别适合于检

查支撑点选择得好坏,但试验工程师还是要选运动幅度最小(因而 DPR 值也最小)的点作为支撑点。

A.6.2.6 小 结

设计模态分析试验时,试验工程师应当利用尽可能多的信息。从这一事实出发,预试验分析这一节主要讨论了正确选择响应点和激励点的一些方法。

有些使响应传感器位置最佳的方法(如 Kammer, Hemez, Link 提出的方法),可以确定一组最少的响应点。因此这些方法非常适合于因重量限制而要求传感器数量最少的情况(例如空间结构)。有许多实际情形,视觉观察对工程师很有帮助,他们希望凭借最小响应点组仍然可以给出容易解释的模态图形(如 Carne 提出的方法)。

激励点的选择常常较少限制,但前面提出的方法有助于减少激励时漏掉模态的机会。

B.2.2 节就如何建立一个适当的试验装置提出了一种比较实际的观点。

A.6.3 结 论

本章我们讨论了怎样把不同来源的模型(以前的试验模型,或有限元模型等)相关联起来,这种相关性可用于不同的目的。

模型修正是一套技术,用实验信息调整有限元模型,使与测量数据较好相关。用这些技术可以得到更加可靠的模型,以便在结构的设计或重设计中使用。

有关过去的试验和/或有限元模型的信息对于准备一个实验模态分析极为有用。这些信息可以提供关于诸如频率范围、响应传感器和激振器的位置、支撑(悬挂)节点的位置等重要指示。

下篇 模态试验

序 言

本书上篇综述了模态分析的各个方面,下篇重点讨论模态试验更加实际的方面。因为需要做出的许多实际决定都是建立在一定的理论背景上的,所以下篇将经常引用上篇的有关理论。

如上篇序言所提到的,实验模态分析由五个方面组成:第一是建立试验装置,即固定试件,安装传感器,连接数据采集系统,校准等等。第二是数据采集,最常做的是估计频响函数。第三是系统识别,从测得的输入/输出数据中确定系统的振动特性。第四是对所得到的结果进行验证。只有经过这四个方面,才能到达第五个方面:按照系统化的方法,利用所得到的结果对系统进行改进。模态实验分析的整个实际过程分为四章加以讨论。

- B.1 章概述模态分析试验所用的仪器设备。虽然我们重点讨论最常用的仪表,但也涉及到一些用于专门试验的仪器设备。在此框架内,我们讨论一些激励系统、力传感器和运动传感器、测量系统及分析系统。因为这一领域的发展极为迅速,有兴趣的工程师们应当把这一章看做仅仅是一个导引,而根据最新的(商业)资料制定自己的方案。

- B.2 章讨论试验设置和测量设备的校准。关于校准也只是侧重于最常用的传感器的校准和最易使用的校准方法。关于建立试验装置,本章对试件的固定(边界条件)、激励和响应的测量、信号处理参数等实际问题给出了一个概略的说明。开头的一组测量应当当做一个工具,检查一下各种试验要求如线性动态特性、Maxwell 互易性、各输入力之间的不相关性、足够的频率分辨率等,是否满足。

- B.3 章讨论为了改善测量结果应该怎样恰当地选择激励信号,将根据诸如所要求设备的复杂程度、激励方法的速度、对系统误差或随机误差的敏感性以及试件的(非)线性等,对几种信号进行比较。

- B.4 章说明怎样实际应用和解释 A.3 章讨论的参数估计方法和 A.4 章讨论的模态验证技术。

为了在给定条件下减小测量结果中的误差,得到尽可能好的模态参数估计,本书下篇讨论试验模态分析的更为实际的方面,给出了许多建议和提示。

B.1 章 试验设备

B.1.0 引言

对于试验工程师来说,要取得最佳的试验结果,仅仅懂得一些实验模态分析的过程是远远不够的。透彻了解与正确选择仪器和测量设备有着同等重要的意义。工程师们的声音在选购新设备时是一重要的意见。根据试验的主要目的,某些专用仪器可能是最合适的,而其他仪器很可能毫无用处。

图 b.1.1 表示“典型”的实验模态分析的各个方面,每一方面都要求有专门的仪表设备。在模态分析试验中,必须给结构施加一个振动力,激振系统或冲激锤就是担当这一任务的。力传感器测量输入到结构去的激振力,运动传感器测量输出的振动运动。这些信号经过分析系统加以处理;分析系统将这些信号离散化并用以估计频响函数。对于多个激励和响应组合情况来说,这个过程要重复多次。所有这些频响函数储存在分析系统的磁盘存储器上。下一步,分析系统将根据测得的频响函数(见 A.3 章)来确定试件的模态特性(系统极点、振型向量、模态参预因子)。动画软件将在显示屏上按线条模型模拟结构的模态振型。

本章讨论模态分析试验各个环节所要求的一些仪表设备,包括激振系统(B.1.1 节)、力和运动传感器(B.1.2 节)、频响分析仪和模态分析系统(B.1.3 节)等。*

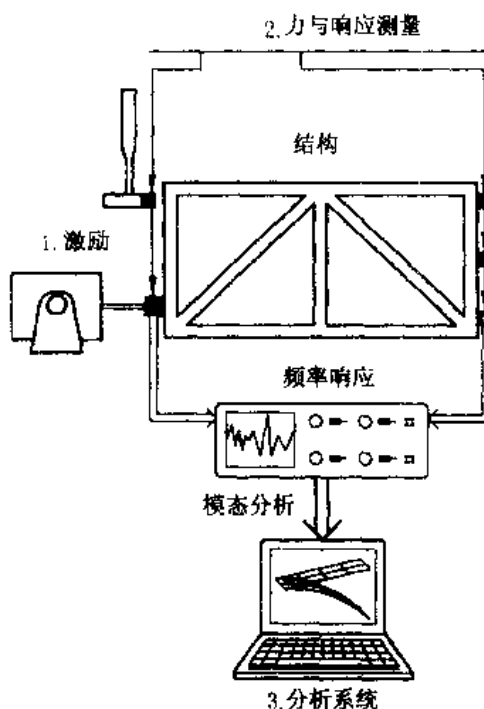


图 b.1.1 模态分析试验概貌

B.1.1 激励系统

B.1.1.0 引言

任一振动试验系统都需要一个装置使试件产生某种振动,这种装置可以与结构相连接,也可以不连。最典型的装置由一个或几个放置在地面上(或固定在架上)的激振器与试件连接起来组成。还有的装置是激振器只与结构相连接。在上述这些情况下激振器对结构的动态特性有一定程度的影响(见 B.1.1.1 节)。另一些情况下采用非连接激励;激励装置与试件不相连(见 B.1.1.2 节),力锤激励就是最熟悉的例子。有时可以给结构预加一个静载荷,突然释放

* 译注:有兴趣的读者可以参考附录 BB.1 至 BB.3

这个预载荷会产生一个阶跃输入力。此外,声激励和磁激励也属于非连接激励。

B.1.1.1 固定式激励系统

B.1.1.1.1 固定-固定式激振器

这类激振器安装在地面(或某一支撑架)上,并与试验结构相连。最常用的固定-固定式激振器是液压式或电磁式的激振器。激振器的主要特性指标包括激振力大小、位移量级和频率范围等。图 b.1.2(参考文献 b.1.1)表示这两类主要的激振器的有效工作区域。

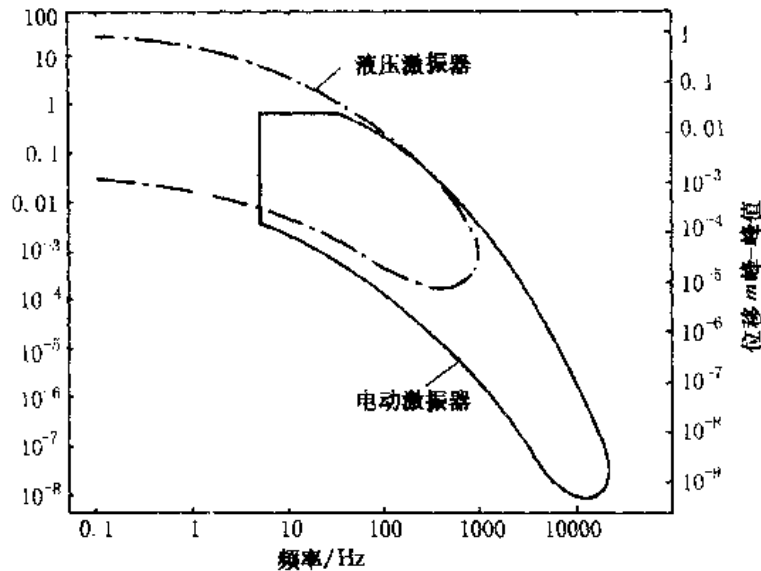


图 b.1.2 液压与电磁激振器的有效工作区域

对于低频试验,典型的频率范围是 0 到 20 Hz,需要用大位移行程,电控-液压激振器能够很好地满足这一需要;电子伺服控制系统使振动信号很容易导引与调整,而液压驱动系统则行程长、推力大。由于这些特点,这类激振器对于模拟粗糙路面上行驶的卡车的振动特性、地震中的建筑物及起飞过程中空间飞行器结构件的振动特性等,是非常理想的。表 b.1.1 列出了液压激振器(参考文献 b.1.2)的一些典型特性。由表可见,在模态试验最常用到的力和频率范围内,这类激振器的尺寸相对于它的最大激振力来说是比较小的。但是,这类激振器总带有一个液压动力源,所以不很灵活。

表 b.1.1 液压激振器的典型特性

动态力/N	5 000	...	100 000
总行程/mm	25	...	25
频率范围/Hz	0 ~ 1000	...	0 ~ 200
尺寸/mm	125 × 100 × 125	...	350 × 250 × 520
质量/kg	5	...	40

电动激振器只需要电源,因而用起来更灵活、更方便。图 b.1.3(参考文献 b.1.1)示出了电动激振器的基本结构:动圈组件与工作台或试件连接在一起,定位在磁场中。电子控制系统发出激励信号,放大后馈送给动圈使产生一个力或速度,从而使试件运动。

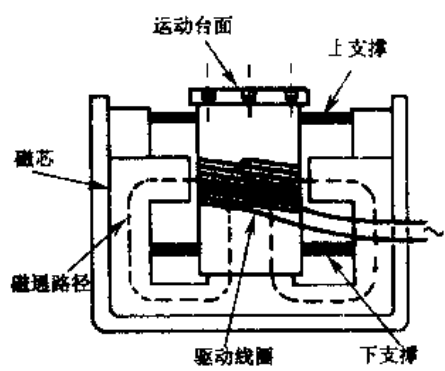


图 b.1.3 电动激振器的基本构造

表 b.1.2(参考文献 b.1.3)示出了许多电动激振器的典型特点。试验工程师应当明白这样一个事实:激振器的输入-输出特性在整个频率范围内并不是平坦的。由于激振器的机电特性,其输入-输出关系在低频段呈现出一个阻尼很大的峰起,跟着后面一段相对较平,而末尾高频段有一些比较陡峭的峰。因为激振器的上述特性,它产生的力或者速度便不可能准确地再现与输入电流或电压相同的特性。如果采用随机激励并测量激振力,问题一般并不严重。但是如果要求对激振力或位移加以限定(如恒幅正弦激励),就需要谨慎从事。

表 b.1.2 电动激振器的典型特性

动态力/N	8	...	1 800
总行程/mm	6	...	19
频率范围/Hz	0 ~ 10 000	...	0 ~ 4 000
尺寸/mm	75 × ϕ 76	...	570 × 570 × 700
质量/kg	1.1	...	250

传输到试件的力输入与给激振器的电压输入不同的第二个原因是,激振器和试件之间阻抗不匹配。在共振点处力有下降趋势(结构表现为几乎没有阻抗),而在反共振点处力又倾向于增加*。

B.1.1.1.2 固定式激振器

第二种固定式激振器是只连接在试件上而不需要地面的连接装置,例如不平衡式激振器和地震式激振器。

不平衡式激振器通常有两个相似的偏心轮,按相反方向旋转(图 b.1.4)。发动机转速决定激励频率。转速、质量和半径决定激振力的大小。频率和力受到发动机功率的限制。一般力可达 60 kN,频率为 50 Hz。这种质量相对较大的激振器将它的质量加到结构上,因而影响结构的动特性。因此,不平衡式激振器主要用以激励很重的物体如钻油平台、楼房、地基等。

对于惯性式激振器,作为参考点的不是大地,而是激振器本身(或某一附加质量)。激振器

* 译注:定电压激振在共振时力下降,既能保护试件,又扩大了动态范围。ISO 标准建议做模态试验时采用定电压激励。

安装在结构上或悬挂在几根绳索上,使驱动部件直接与试件相连。在后一种情况下,几乎不给结构附加什么质量。典型特性是:最大力为 133 N,最大行程为 16 mm,体积为 53 mm×21 mm×17 mm,质量为 36 kg(参考文献 b.1.4)。

B.1.1.1.3 评述

激振器给试件的附加质量对结构的振动特性总会有一定程度的影响。一般,激振器与结构之间的连接是通过单向力传感器(B.1.2.1 节)实现的,为了避免激振力漏测,要确保在力测量的方向去激励结构(如用拉压测力计时不要对结构施加弯矩)。因此,激振器和试件之间的连接应当在测量方向上是刚性的,而在所有其他方向上是很柔性的。此外,激振器可能对结构附加一定的质量、阻尼和刚度。

为了借助激振器使结构振动,必须有另一重要设备:信号发生器。信号发生器产生激励信号(随机信号、正弦信号、用户规定信号等,见 B.3 章)。有些分析系统机内装有信号发生器,这种情况下输入信号是高度可控的。其他情况可能需要独立的信号发生器,这时可以用滤波器消除激励信号中不希望要的频率成分,然后将这些信号送至激振器功放,控制力或速度的量级。

B.1.1.2 非固定式激励系统

此类激励系统最重要的优点是不给结构附加任何质量,因而不会影响试件的动特性。最常见的例子就是力锤激励,另外还有预载-释放激励,声激励和磁激励等。

如前提及,对被试结构进行激励的目的是在规定频率范围内产生一定量级的力。例如用力锤输入一个冲激,就会产生较为平滑地延伸到指定频率的力。锤子和力传感器结合在一起构成一件仪器(B.1.2.1 节)。图 b.1.5 所示就是一个常见的力锤。

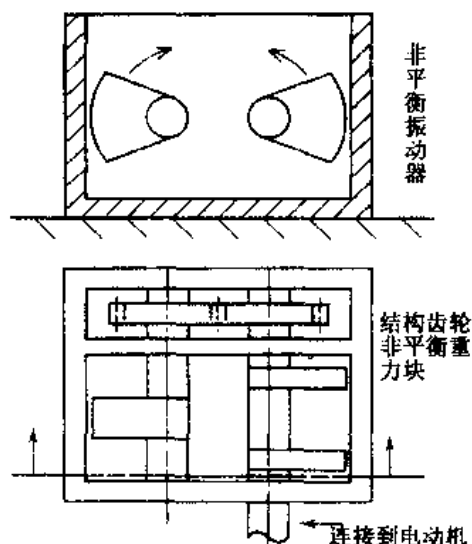


图 b.1.4 不平衡式激振器的基本构造



图 b.1.5 激振力锤

激振力的能量量级和频率展宽取决于操作者用力的大小、力锤的重量、锤头的硬度以及结构上被敲击点的可塑性。输入力越接近 Dirac 脉冲(持续时间为零,力幅度无限大,冲量为一个单位),激出来的基带频展就越宽。锤头硬,锤的质量小,用力小,试件表面硬,则力锤与试件之间的接触时间就短,这样激励信号就接近于 Dirac 脉冲,激出的基带频展将达到很高的频率(比如 10 kHz)。激振力锤特别适用于质量较轻、比较刚硬的结构(如压缩机叶片,钣金部件,

印刷电路板等)。锤子重,锤头软,接触时间就会加长,这样可以激出较低的频率来(图 b.1.6)。极端情况,用锤激法可以激励共振频率很低的重型结构如建筑物、火车、船舶、地基等等。

如图 b.1.6 所示,力锤激振总能产生一个平滑的延伸至规定频率的力。另一方面,因为总输入能量集中在一个很短的时间内,于是与此有关的非线性问题和局部变形问题便产生了(见 B.3 章)。为改善重复性和控制冲激的量级,一些公司开发出了“自动”力锤。

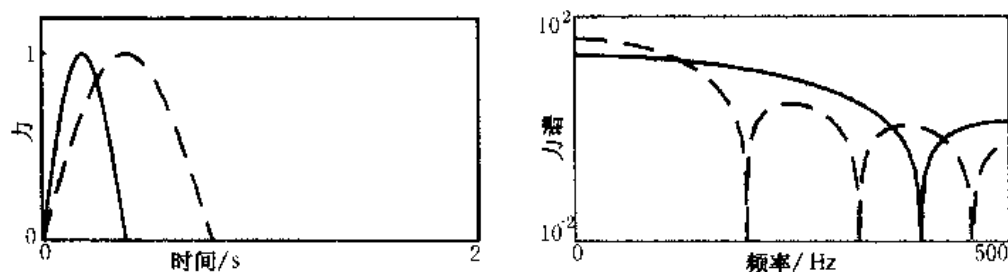


图 b.1.6 力锤信号及其频率含量

另一种非固定式激励是通过一条线或绳索给结构一个预载荷,然后突然将预载荷释放。这样就给结构输入一阶跃力,其频率含量与冲击力相似。这种方法有时应用于塔式结构。

有些结构,特别是轻型结构,可用扬声器辐射出的声能激励。这种方法适用于高频。有些情况下也可以用磁能激励。这些方法的主要缺点是实际的输入力无法测量。

B.1.2 力和运动传感器

B.1.2.0 引言

结构在激振器或力锤的激励下产生振动时,输入到机械系统的信号和从该系统输出的信号都必须进行测量。系统的输入一般是力,用力传感器测量。系统输出通常是结构上一些感兴趣点的位移、速度或加速度,这些输出量用运动传感器测量。

模态分析试验中最常用的传感器是以压电晶体为敏感元件的。当晶体变形时,它的两个极面上会产生与其变形成正比的电荷,而变形是与晶体受到的力成正比的。

把晶体两端的电荷变换为电压信号有两种办法:一种是采用电荷放大器(电荷型传感器),另一种是采用内置电路(电压型传感器)(图 b.1.7,参考文献 b.1.5)。这两种办法都可解决电缆未知电容的影响问题(参考文献 b.1.6)。电荷型的主要优点是动态范围大,但传感器与电荷放大器之间的电缆很关键,因为它对外部的干扰非常敏感。电压型传感器需要一个外部恒流直流电压源为其内部电路供电。由于阻抗很低,又是电压输出,所以该装置(电缆)对外部干扰比较不敏感。

作为压电介质的材料,可以是(人工)多晶格陶瓷,也可以是天然或再生晶格石英。常温下石英在时间上是非常稳定的。在极高温下,或要求电荷灵敏度较高时,多晶格陶瓷表现更为出色。

除温度变化的影响外,还有其他一些影响因素,如声干扰、腐蚀性物质、湿度、磁场、核辐射、基座应变、电缆噪声等。大多数情况下这些影响很小,也容易避免。如前所述,当使用电荷

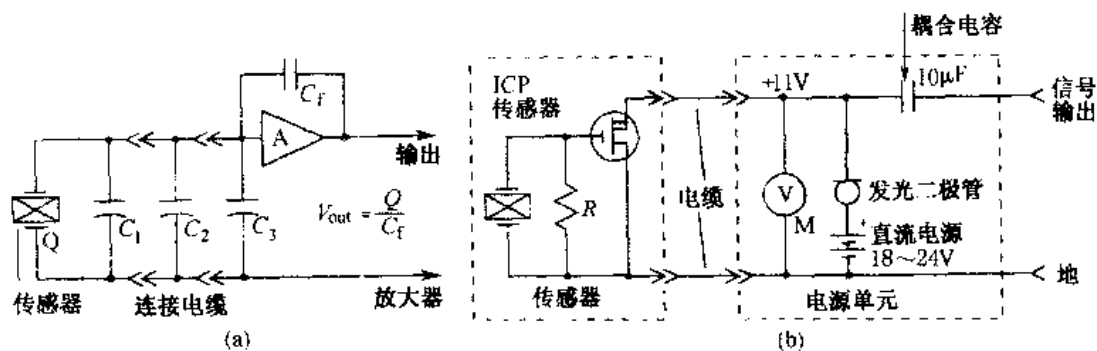


图 b. .7 压电传感器:电荷型和机内电路型

型传感器时应考虑采取特别的预防措施。

B.1.2.1 力传感器

在大多数模态分析测量中,压电力传感器代替了带有应变片的传统的测力计。图 b.1.8 是压电力传感器的原理示意图;作用于传感器上的力使压电晶体变形,从而在晶体上面产生电荷。

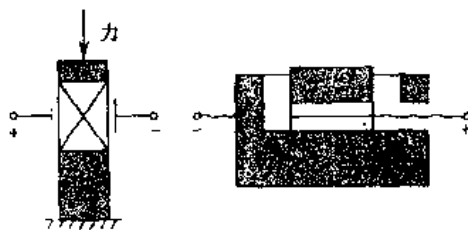


图 b.1.8 压电力传感器的原理

压电力传感器的主要特性指标是最大力、最低频率和最高频率(与负载有关)以及灵敏度。表 b.1.3 给出了电压型力传感器的典型特性参数。专用力传感器还有一些别的特性参数。

对于很低频的测量,应变片式的动态测力计仍在使使用。一般来说,力传感器对模态分析测量的影响比加速度计要小。

表 b.1.3 典型的力传感器特性参数

最小力及最大力/N	0.000 5 ~ 10	...	10 ~ 250 000
共振频率/kHz*	300	...	25
灵敏度/(mV/N)	500	...	0.025
质量/g	8	...	550
注*:在空载传感器上的测量值			

B.1.2.2 运动传感器

B.1.2.2.0 引言

在机械结构的模态分析试验中,响应通常是结构物体的运动,以位移、速度或加速度来表示。理论上,测量这三个运动参数中的哪一个是无关紧要的。测量位移对低频情况更为重要,而高频情况下更强调测量加速度。速度的均方根值(RMS)被称为“振动烈度”,因为振动速度与振动能量有着简单的关系。这可能是需要测量速度的重要原因。然而,正如参考文献 b.1.7 所证实,位移传感器和速度传感器一般都比较重。大部分运动传感器都是(比较简单的)质量-弹簧系统,都有一个共振频率。位移传感器在它自身共振频率以上的频带内其输出信号与其位移成正比。这必然要求共振频率很低,从而需要较大的质量($\omega_r^2 = k/m$)。对于加速度计情况正相反。质量越小,把它粘在结构上时对结构的影响就越小,测量也就越精确。加速度计的另一个好处是,加速度信号可以通过积分电路正确地积分,从而得到速度和位移,而将速度传感器和位移传感器跟微分电路一起使用是愚蠢的,它会放大高频噪声(参考文献 b.1.1)。所有这些考虑使加速度计在模态分析试验中成为应用最广泛的运动传感器。

B.1.2.2.1 加速度计

如前所述,加速度计本身是简单的质量-弹簧-阻尼器系统。它产生的信号在远低于它的固有频率的频带内与加速度成正比(见图 b.1.9,根据参考文献 b.1.1, b.1.8)。这使加速度计成为非常刚硬轻巧的传感器,又非常坚固耐用。

加速度计的质量-弹簧机制可以按几种不同的方法来构成。图 b.1.10 表示悬臂梁式、剪切式和压缩式等三种加速度计(根据参考文献 b.1.8 和 b.1.9)。其中第一种加速度计中,应变片可将惯性质量块的运动记录下来。其他两类加速度计中,压电元件的机械变形(无论是拉伸、压缩还是剪切)产生的电荷正比于它承受的加速度。

由于加速度计的共振特性(图 b.1.9),它的可使用上限频率被限制在其共振频率的 0.3 倍左右(在上限频率处允许误差小于 10%)。如果使加速度计的阻尼比达到临界阻尼的 70%,则加速

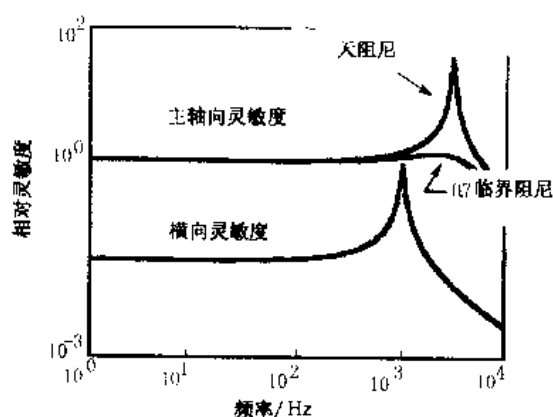


图 b.1.9 加速度计典型的主轴灵敏度和横向灵敏度

度计的可用频率范围可延宽到其共振频率的 50%。这样可避免加速度计在使用频率范围内过载,但却会引起相移。因为在悬臂梁式加速度计内,这样大的阻尼一般是通过采用粘性流体介质实现的,所以在高频时的特性就与温度有很大关系。在剪切和压缩式压电加速度计中施加足够的阻尼是很困难的。

图 b.1.9 也表示出了横向灵敏度,即传感器对垂直于它的主轴的运动的灵敏度。加速度计的横向灵敏度一般小于 1%。然而横向共振频率低于主轴共振频率,结果在高频范围内测量精度会降低。

表 b.1.4 和表 b.1.5 分别列出了电压型和电荷型加速度计的主要特性。一般,第一阶共

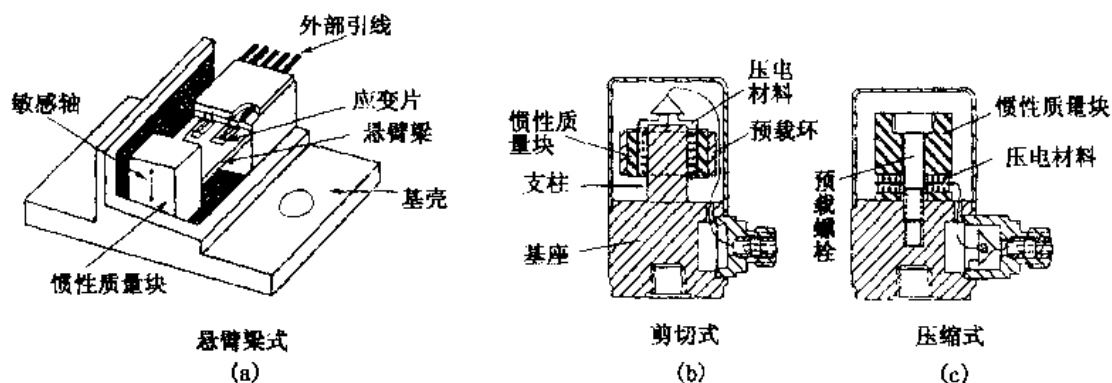


图 b.1.10 加速度计的悬臂梁、剪切与压缩结构

振频率较高的压电加速度计体积较小,质量较轻,灵敏度也较低。

表 b.1.4 典型的电压型压电加速度计特性

最大加速度/(m/s^2)	5 000	...	160
频率范围/Hz	1 ~ 10 000	...	1 ~ 3 000
灵敏度/[$\text{mV}/(\text{m/s}^2)$]	1	...	30
质量/g	2	...	55

表 b.1.5 典型的电荷型压电加速度计特性

最大加速度/(m/s^2)	50 000	...	20 000
频率范围/Hz	0.2 ~ 12 000	...	0.2 ~ 6 100
电荷灵敏度/[$\text{pC}/(\text{m/s}^2)$]	0.32	...	3.2
电压灵敏度/[$\text{mV}/(\text{m/s}^2)$]	0.5	...	2.6
质量/g	2.5	...	17

限制加速度计可用频率范围的最后一个重要因素是将它安装在结构上的方法。图b.1.11 (参考文献 b.1.1)概括了各种可能的安装方法。每一种安装都相当于一个弹簧,并与加速度计质量又构成一个质量-弹簧系统。用螺接方法效果最好。然而这种非常刚性的安装(共振频率大约为 30 kHz,视加速度计的质量而定)要求在结构上所有需要的地方打孔,并且要求平整光滑的安装面。一个常用而便捷的方法是用一薄层蜂蜡(最高温度 40 °C,最大加速度 100 m/s^2)。为了保持较高的安装共振频率(30 kHz),这层蜂蜡应尽可能薄。永久磁铁可以很容易在带有铁磁表面的结构上到处移动,然而,这种连接方法允许的最大频率比前面提到的方法低 4 倍左右。最后,手持式探头对于快速摸底工作是很方便的,此种方法的最高频率约为 700 Hz,所得结果重复性不是很好。

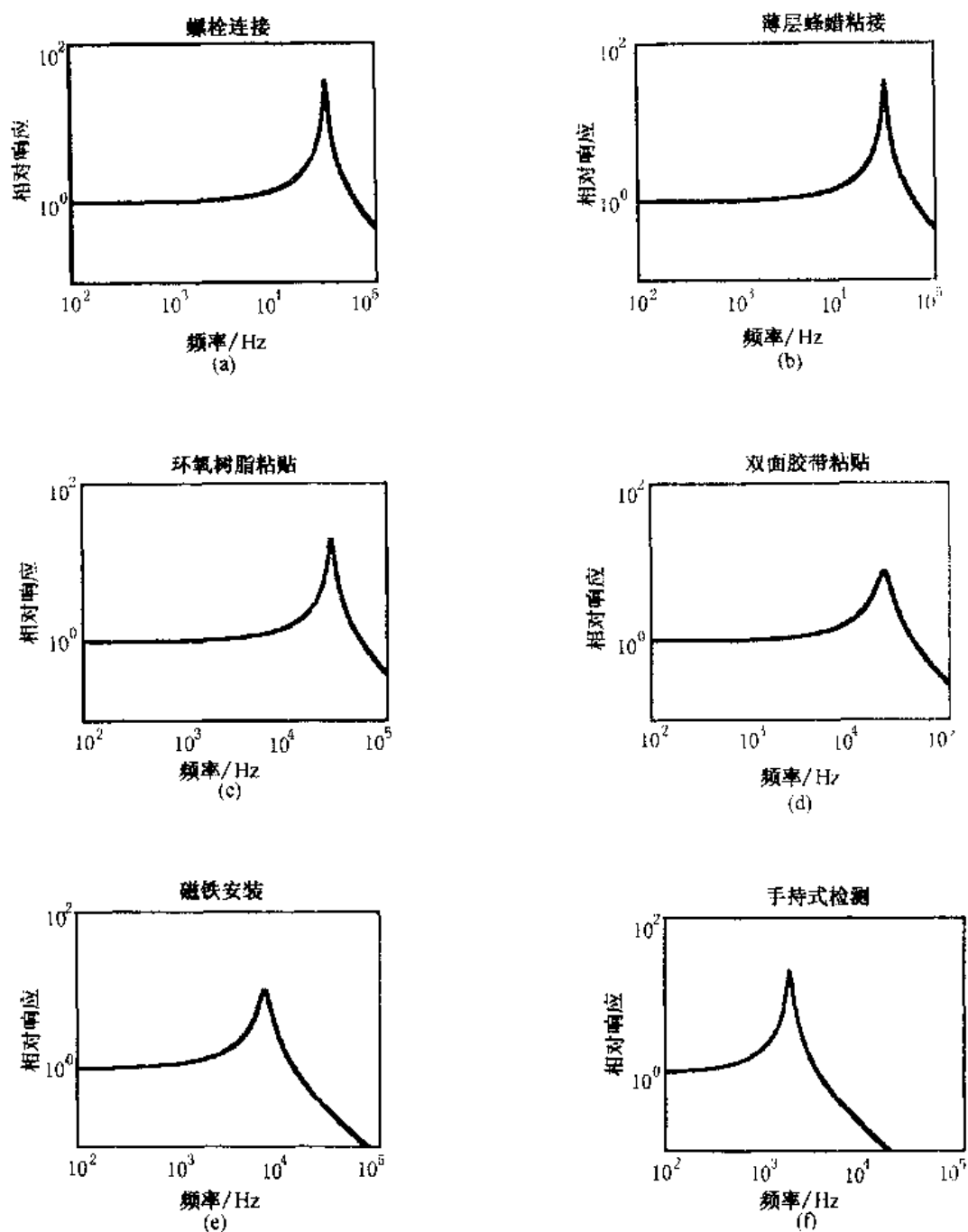


图 b.1.11 不同安装方法的加速度计响应

(a) 螺栓安装; (b) 薄蜂蜡层安装; (c) 环氧树脂胶安装
(d) 薄双面胶带安装; (e) 磁铁安装; (f) 手持探头安装

同样重要的是加速度计的安装位置。传感器必须安装在待测量振动点的待测方向上,如果可能的话测点其他方向没有振动(要知道,加速度计有横向灵敏度!)

最后,安装加速度计要考虑到这样的事实:附着上的加速度计对结构的振动特性的影响应尽可能小。这样有时会限制高灵敏度(因此也是比较重的)加速度计在轻型结构或结构的较轻

部件上的应用。当前流行的多通道测量这样一种趋势,提高了整体的一致性,但大量加速度计的质量载荷影响可能会成为严重问题。

有一种特殊加速度计叫伺服加速度计,图 b.1.12(参考文献 b.1.6)解释了它的工作原理。当加速度计机构沿其输入轴被加速时,质量 m 产生一个小的位移,此位移被一个运动探测器测到,探测器便输出一个误差信号。该误差信号输入到伺服放大器,伺服放大器的输出电流流过扭矩平衡线圈,此电流产生相等的恢复力矩加在质量 m 上。负载 R 两端的电压是输入加速度的准确模拟。它的高灵敏度和零下限频率从表 b.1.6 看得很清楚。

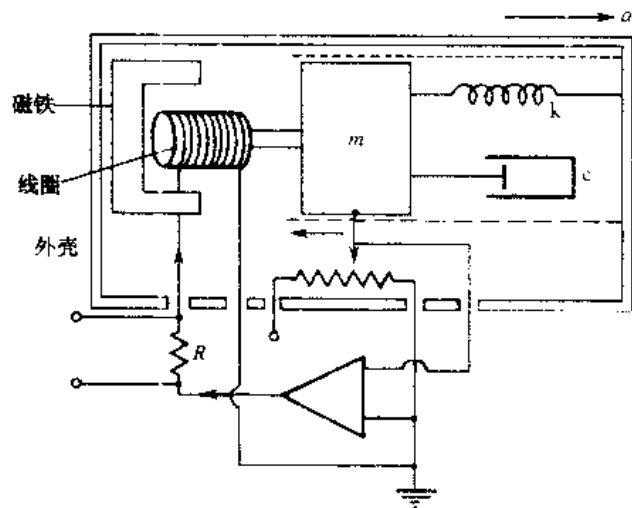


图 b.1.12 伺服加速度计的工作原理

表 b.1.6 典型的伺服加速度计的特性

最大加速度/(m/s^2)	500	...	1 500
频率范围/Hz	0 ~ 300	...	0 ~ 300
灵敏度/[$\text{mV}/(\text{m/s}^2)$]	500	...	10
质量/g	20	...	20

另一类能够测量零频加速度的加速度计是通过电感来测量惯性质量块的位移(表 b.1.7)。

表 b.1.7 典型的电感式加速度计的特性

最大加速度/(m/s^2)	400	...	5 000
频率范围/Hz	0 ~ 100	...	0 ~ 1 000
灵敏度/[$\text{mV}/(\text{m/s}^2)$]	4	...	0.08
质量/g	17	...	17

B.1.2.2.2 非接触式运动传感器

专用运动传感器用于特殊场合。对于很小的轻型结构,非接触测量可能是必要的。

测量导电材料表面的位移的一种可能的方法是根据近程感应原理进行的。图 b.1.13 表示,气隙的变化怎样引起磁通的变化,而磁通的变化可以作为电感的变化来测量。这样的探头一般在 0.25 mm 至 3.3 mm 的位移范围内是线性输出的。

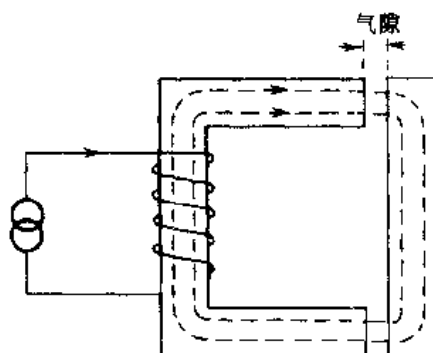


图 b.1.13 近程感应原理

激光测振仪是无接触运动测量的另一种方法,图 b.1.14(参考文献 b.1.10)对这种方法的原理给出了解释。信号光束射向振动表面并被反射,反射光束与初始参考光束相结合。当结构表面运动时,参考信号光束与反射光束之间的光程差就改变,结果由于干涉现象而使组合光束的强度被调制。这可以看成是参考光束与信号光束的重组效应,根据 Doppler 效应,组合光束的频率被移动了 $f_d = \frac{2v}{\lambda}$ (此处 λ 是激光波长(例如氦-氖激光的波长是 $\lambda = 6.32 \times 10^{-7} \text{ m}$), v 是表面的运动速度)。因为 Doppler 频率 f_d 与强度调制的频率之间存在着一一对应关系,所以 Doppler 频率 f_d 包含着有关表面速度的信息。有许多电子线路可用以确定表面速度的方向并产生一个与表面速度成正比的电压信号。这样的装置可以测量频率为 0~5 kHz、速度为 0~100 mm/s 的振动。

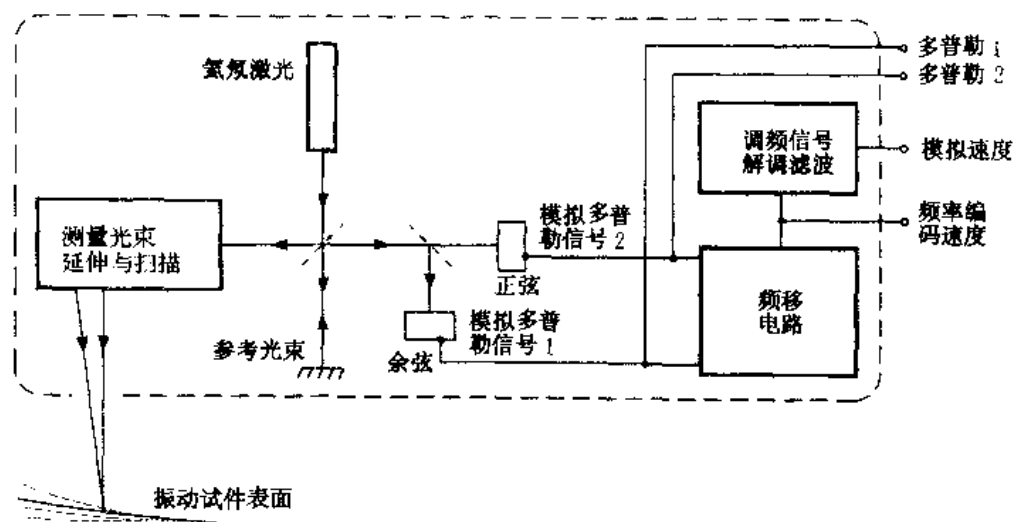


图 b.1.14 激光测振原理

还有一些非接触运动测量装置是以光束敏感器(参考文献 b.1.11)或光斑干涉仪(参考文献 b.1.12)原理为基础的。

B.1.2.3 小结与评述

正如大多数试验所表明的,在力和加速度测量中,压电传感器工作相当出色。在一些极端条件下,例如频率很低或很高,试件很重或很轻,有湿度、磁场环境要求等等,总是需要用专门的测试仪表。时间和/或仪器设备总是在诸如频率范围、精度、测量自由度等方面制约着测量结果(例如转动自由度仍然很难测量或很费钱)。

在进行任何测量之前先校准仪器设备是一种良好的做法。第二章在讨论测量设置时将说明仪表的校准问题。

大多数传感器都要与信号适配器、放大器和/或滤波器相连接。这些仪表有的在数据采集前端可以做到一起(见 B.1.3 节)。

B.1.3 测量与分析系统

B.1.3.0 引言

如图 b.1.1 所示,实验模态分析框图的第三个方面是数据采集与分析系统。这个方面有两个任务:第一是记录并处理测量数据,例如确定频率响应;第二是从测量得到的频响函数中导出并确定模态参数(共振频率,阻尼系数,模态振型向量)。

能够完成或部分完成这一任务的系统在价格、配置、特性等方面差异很大,因此选择比较困难。具体测量系统的选择受到下列因素的影响:

- 资金预算
- 已有的计算机和/或测量系统
- 测量的类型、数量、频率和位置
- 分析人员的经验
- 与软硬件供应商的当前联系
- ...

这些因素将对系统的特性提出具体的要求如下:

- 测量通道数
- 最大频率范围
- 精度
- 整机速度和性能
- 可以利用的机内滤波器、输出信号发生器、窗的类型以及(可自动控制)放大器
- 便携性
- 与现有硬、软件的兼容程度
- 价格
- ...

为了满足这样广泛的要求,市场可以提供从将 FFT 分析仪(快速傅立叶分析仪)与一台 PC 机或工作站相结合的 PC 机系统(带有可插入的数据采集板),到带有数据采集前端模块的工作站。

由于测量分析系统的广泛性,本章要给出完整的描述是不可能的。而且,技术发展飞快,未来的购买者应当根据软、硬件商发布的最新信息作出决定。

B.1.3.1 PC机系统

将一台 PC 机扩展成为一个简单的动态测量系统可能是最便宜的测量系统;这样的系统一般是通过增加一些专用的硬、软件而实现的。

为了使 PC 机能够记录和处理测量数据,必须给它安装一块或几块测量电路板。这些测量板通常要和专用的软件结合安装以便控制数据的采集与操作。这样硬软件的结合就把 PC 机变成了一台(2、4…通道)FFT 分析仪。上述硬件电路板一般包含一个模拟适调单元(可编程放大器和滤波器等)和一个数据采集单元(ADC(模—数转换器)、触发控制器等等),其主要特性指标是采样速率(例如 300 kHz 除以通道数)、ADC 精度(12 或 16 比特)、频率范围(0 到几十或 100 kHz 等)、滤波特性(例如 85 dB/oct.)、细化能力,等等。

为了模拟数字存储示波器,按照某种(数据库)结构方式贮存和调用测量数据,相应的软件要具备执行 FFT 计算的能力。充分利用这些软件工具完成测量过程自动化、显示规定、数据库管理等工作,这将是使用者的任务。PC 机系统的性能在很大程度上取决于处理器的速度、内存的容量、硬盘空间等。

为了从测量并储存起来的试验数据(如频响函数)导出模态参数,还需要另一类软件程序。商业上有好多种用于 PC 机的模态分析软件包已经投放市场;几乎每家 PC 机杂志至少刊登一种这类软件广告。这类软件包常常含有一个具备基本能力的核心软件,分析员购买一些基本软件的扩展软件就可以使 PC 机系统的性能得到加强。同样,软件的速度和性能决定于安装的硬件。

PC 机系统的主要优势在于它的价格(不需要单独的 FFT 分析仪)以及它与现存硬件及软件的高度兼容性,它的缺点则是能力有限*。

B.1.3.2 FFT 分析仪加 PC 机或工作站

这样的配置由一台 PC 机或工作站与一台 FFT 分析仪组成。在这种配置中有两种可能的操作模式:

- 由 FFT 单独进行测量并将数据储存在它内部的磁盘上,下一步,再由模态分析系统(PC 机或工作站)读出并分析这些测量数据。

- PC 机或工作站通过 FFT 分析仪对测量进行控制,测量数据立即储存到 PC 机或工作站的磁盘存储器中。

市场上有各种类型的 FFT 分析仪,它们都是独立的系统,执行信号采集和处理任务如求取频响函数等。FFT 分析仪的基本型式有两个通道,频带宽度达 40 kHz,有一定量的内存,显示操作容易。它们可以测量各种各样的时间信号和频率信号(见 A.2.6 节)。价格较贵的这类分析仪有 4 个或更多个通道,频率展宽可达 100 kHz,具有细化分析能力,具有用于信号发生、阶次跟踪的数—模转换器(D/A),有用于模态参数估计的曲线拟合能力,有扩展内存等。FFT 分析仪的这些功能及便携性,使它们成为现场测量的绝好工具。因为这方面的发展很

* 译注:现在 PC 机系统的功能已经很强,可以满足很多方面的使用要求。

快,潜在用户应当自己透彻了解最新信息。

PC 机或工作站的作用可以仅限于模态分析本身,也可以包括通过 FFT 分析仪对测量进行控制。在前一种情况下,测量得到的频响函数传输到 PC 机或工作站并储存在那里。PC 机或工作站必须装备必要的软件(见 B.1.3.1 和 B.1.3.3 节),然后才能作为独立的分析系统工作。在后一种情况下,PC 机或工作站通过软件程序向 FFT 分析仪发出必要的命令对测量进行控制。这种办法使测量过程自动化,但要求 FFT 分析仪具有外部可编程能力。

B.1.3.3 数采前端加工作站

最灵活多能的(通常也是最贵的)测量分析系统配置,是一台工作站连接一部多通道数据采集前端。这样的配置大大提高了测量和分析能力。大多数数据采集前端以模块化结构为特征。例如起初是一台 4 通道配置,我们很容易将它扩充到 64 或更多个通道。一般,每个输入通道都含有一个模拟信号适调模块,一个可编程放大器,一个模-数转换器,一个可编程滤波器。通常,数采前端还具有一个(多路)输出模块,以便以某种信号(随机、猝发随机、正弦等,见 B.3 章)驱动一个或几个激振器。

如果将这样的前端连到一台功能强大的工作站,那末我们就可以充分利用该系统的能力(例如 UNIX 环境、Windows、大内存、大磁盘空间、快速计算……)。有几家公司销售专为这类系统编写的软件。这些软件包也是模块化结构,便于逐步扩充和用户编程。通过中性文件概念,这些数据可用于用户程序开发,或与有限元及其他计算机辅助工程软件包相连接。

B.1.3.4 数据采集模块的基本构件

数据采集模块的基本构件是数-模转换器(D/A)和模-数转换器(A/D),多路转换器与滤波器。这些基本构件可以是独立数据采集前端的一部分,也可以在 PC 机插板上或者在 FFT 分析仪机内实现。

B.1.3.4.1 D/A(数-模)转换

图 b.1.15 表示 D/A 转换器的原理图。它是一个电子电路(或仅仅是一块芯片),有许多数字输入端和一个模拟输出端。每一个二进制输入,如果相应的数位开启的话,都产生一个确定的电压(取决于它的权的大小)。输出则是所有这些电压的和。因为这种装置很容易制造,所以便宜而快速。转换时间为 10 ms 到 0.1 ms 或更小。其精度或动态范围随着数字输入位数的增多而增加。

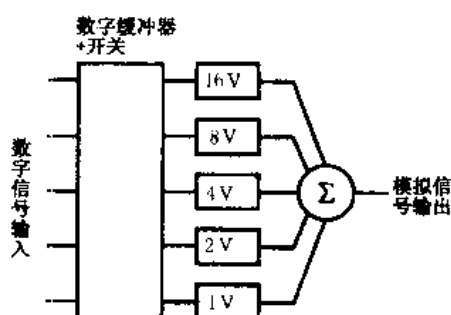


图 b.1.15 D/A 转换器原理

B.1.3.4.2 A/D(模-数)转换

A/D 转换器比较复杂,主要类型有计数器型与闪光型,它们的精度同样是取决于位数(例如是 12 位还是 16 位)。

计数器型

当模拟信号送入 A/D 转换器时,转换器就开始二进制计数,从最小值计到最大值。对于每一个计数器位置,内部的 D/A 转换器就产生一个相应的模拟电压。该电压与输入信号相比较,一旦二者达到了相等,计数器此时的数字值便储存于缓冲内存,以便计算机做进一步处理(图 b.1.16)。

建立在这种搜索原理上的 A/D 转换是比较慢的(100 ms 到 10 ms)。智能些的搜索计数器(如二进制搜索算法)可以使处理速度稍有增加,但却使价格显著提高。

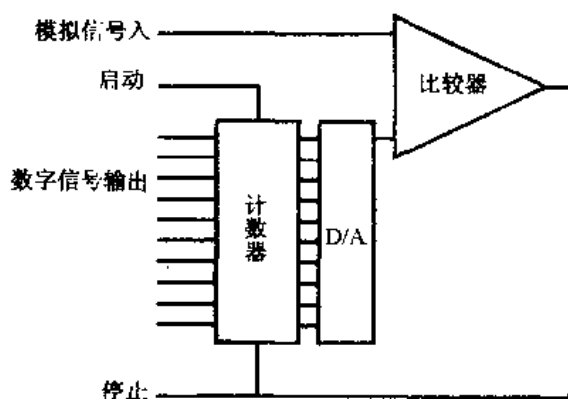


图 b.1.16 计数器型 A/D 转换器

闪光型

闪光型计数器(图 b.1.17)为每一个可能的输出电压保持一个单独的参考电压,以便输入信号与之相比较,速度非常快。这个二进制信息由一个数字电路转换成普通的二进制数。这种方法的转换时间可达 $10\ \mu\text{s}$ 到 $3\ \mu\text{s}$,然而其电路的复杂性与价格随位数成指数关系增长。

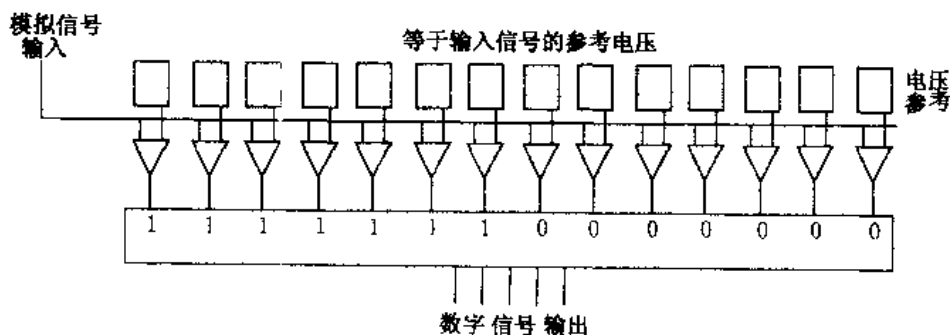


图 b.1.17 闪光型 A/D 转换器

B.1.3.4.3 多路转换器(MUX)

由于 D/A 转换器速度慢,而 A/D 转换器又价格高,所以我们可以采用多路转换器。图 b.1.18 表示一种可能的配置。多路转换器分时使用 A/D 转换器和 D/A 转换器。在图中右边情形,有一个“采样保持”机制,它一直保持其电压不变,直到其输出被接通。

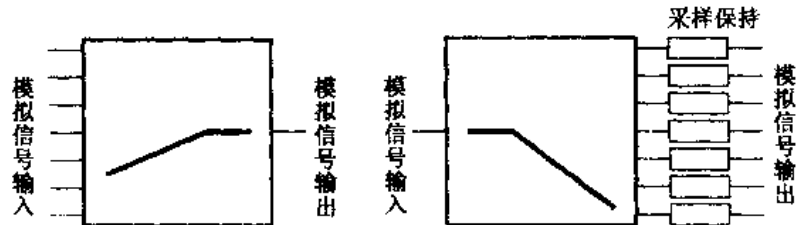


图 b.1.18 多路转换器

B.1.3.4.4 滤波器

对连续信号进行采样(离散化)的后果之一可能是迭混误差(见 A.2.4.1 节)。为避免此种误差,必须消除高于采样频率之半的所有频率。低通滤波器可以对付这个问题。理想低通滤波器对低于其截止频率的任何频率都不应产生影响,而对高于该频率的任何信号应切除干净。但实际的滤波器却呈现出某种陡峭性。从某一频率开始,滤波器对信号的幅度按照 6, 12, 18, 24, ... dB/octave(滤波器阶次 1, 2, 3, 4, ...)加以衰减。滤波器出现 -3 dB 衰减量的频率就是它的截止频率。滤波器不仅影响幅值,而且影响相位。某些滤波器在感兴趣的频率范围内常有波动而不平坦的谱。这叫做滤波器的波纹。

B.1.3.5 评 述

本章讨论了几种层次的测量与分析系统,它们在性能、灵活性、大小和价格等方面是有区别的。由于这一领域的发展极为迅速,有兴趣的购买者应当根据最新信息作出自己的决定。

B.1.4 结论与述评

从实验模态分析过程的全局观点出发,本章讨论了激励系统、力传感器和运动传感器、测量与分析系统。电动激振器和冲激力锤是最常用的激励系统。必要信号的测量常用压电力传感器和加速度计进行。不太方便的测量环境可能促使试验者作出其他选择。从 PC 机系统到复杂的前端与工作站组合系统,大体说来有三种级别的测量和分析系统可以使用。特别是在后一领域,当然还有传感器领域,仪表设备正在高速发展中。

B.2 章 校准与设置

B.2.0 引言

本章讨论怎样建立一个具体的模态分析试验,并对其中所包含的许多问题的实际意义做一概述。工程师们要建立一个合理的模态分析试验设置,就得以理论与经验做向导。

第一节讨论传感器的校准与测量设置,它与讨论力和运动传感器的 B.1.2 节有密切联系。

第二节讨论模态分析试验的许多实际考虑,如激励点和方位的选择、响应传感器的安装、边界条件的确定、试验程序(频带、数据块大小…)的规定等。

最后一节讨论试验设置正确性检验。检验是根据对测得的函数(如力的自功率谱、相干函数等)的解释以及结构线性与互易性的检验方法而进行的。

虽然本章是按某种可能的逻辑顺序对所有上述这些问题展开讨论的,但在实际上,许多问题随时都可能发生。

B.2.1 校准

B.2.1.0 引言

这一节只讨论应用最为广泛的传感器(及有关设备),即压电传感器(见 B.1.2 节)的校准,但其中所用的许多方法也适用于其他类型的传感器。

力和运动传感器的制造商交付产品时都随带一份用数字与图表形式给出的可靠的校准信息。一般情况下,这些传感器的特性能够相当稳定地保持。但如果条件极度恶劣,或操作粗暴(如加速度计从高处坠落、力传递元件过载等),它们的特性可能改变。另外,因放大器、滤波器与信号适调器等决定着最终馈送到计算机去的信号,所以完整而可靠的校准也应当包括这些设备在内。因此,每次试验之前重新校准传感器是一种良好习惯,而且校准本身也是在传感器安装、电缆固定、各种传感器、滤波器与放大器的使用方法等方面获取实际经验的最好练习。

对试验工程师来说,校准传感器有各种各样的方法可以采用。参考文献 b.2.1, b.2.2 和 b.2.3 详细讨论了传感器的各种校准方法:从需要复杂仪表的高精度方法到精度虽然较差但较简便易行的一些日常方法。

B.2.1.1 高精度校准法

互易法和激光干涉仪法是校准加速度计采用的绝对方法,就是说,不是通过与一个“标准”的参考加速度计相比较而校准的(参考文献 b.2.1)。它们的主要用途正是对这样的参考加速度计进行校准。这些方法要求专门的设备和极为精细的操作,一般相当费时而麻烦,因此几乎只有制造商和国家(或国际)标准实验室才采用。试验模态分析员不需要这样做,而采用比较简易的校正方法。

B.2.1.2 重力校准法

第一组简易校准方法是重力法,即利用最易获得的加速度——地球重力加速度 g (9.81 m/s^2) 进行校准。最清楚明了的校准方法是使加速度计从某一竖直位置绕一水平轴旋转 180° 。这样记录下来的输出信号,其加速度值的最大变化量应为 $2g$ 。这种方法只能对在零频率时正常工作的加速度计给出有用的结果(见 B.1.2 节),因而不适用于压电加速度计。另外,这种方法还假定加速度计在高频段的响应是平的。

略好一点的方法是所谓“振落(chatter)”法(图 b.2.1)。振动校准器内有一个振动球;振动器以 50 Hz 的频率对安装在其平台上的加速度计予以激励。不断增加正弦激励的幅值,直到小球开始跳动,此时约加速度为 $1g$ 。这种方法的精度可达 5% 。因校准是在单频上进行,故也假定加速度计的响应在整个有用频带上是平坦的。

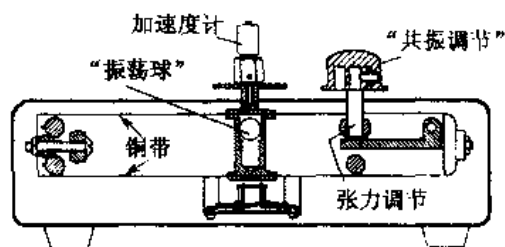


图 b.2.1 振动校准器

跌落校准是重力校准法的又一个例子,其装置和解释非常简单(见图 b.2.2 和参考文献 b.2.3)。安装在基座(质量块)上的加速度计,用一条软线从弹性芯结吊起。敲击该弹性芯结会使软线短暂松弛,从而使加速度计只在重力作用下做自由落体运动。输出信号峰值可直接按 V/g 给出加速度计的灵敏度。有经验的人用这种校正方法可以达到 3% 的精度。

同样,这一装置也可用来校正力传感器。在安装基座上粘贴一个力传感器,力传感器上安装一个已知质量。力灵敏度等于加速度灵敏度除以已知质量。由于实际装置的限制,附加质量不能太大,所以这种方法只适用于力值较小的情况。

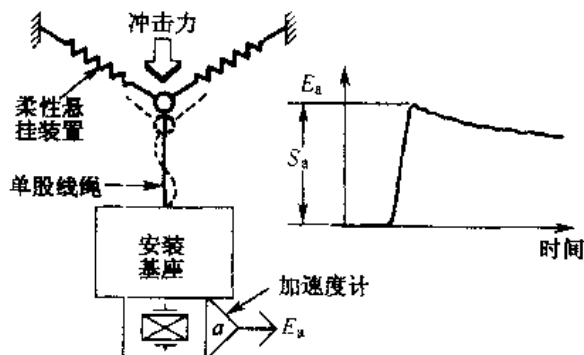


图 b.2.2 跌落校准;装置及信号解释

B.2.1.3 冲击校准、背对背校准和绝对校准

图 b.2.3(参考文献 b.2.4)演示的是冲击校准方法。第一测量通道记录下质量块和加速度计被力传感器举起时的力: $F_1 = mg$ (实际上是用传感器秤出质量—加速度计组合体的重量)。第二测量通道记录下质量—加速度计组合体落回到力传感器上做减速运动时的力: $F_2 = ma$ 。由比值 $F_2/F_1 = a/g$ 得出减速度为 $a = \frac{F_2}{F_1}g$ 。比较此值与第二测量中加速度的实际电压读数即可得到加速度计的灵敏度。此法达 5% 的精度是可能的。

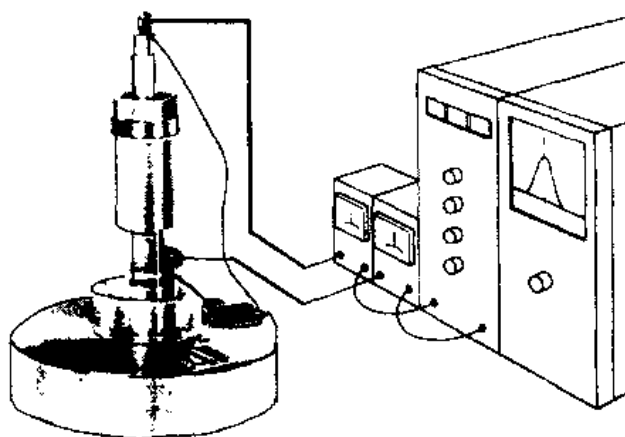


图 b.2.3 冲击校准装置

背对背法是一种经典的校准方法,它把被校准加速度计与基准加速度计相比较。有一些厂家生产专用的标准加速度计,加速度计两个端面都备有螺栓,一头装在振动器上,另一头与未知加速度计相连。这种标准加速度计的内核都是石英晶体,因石英晶体具有很高的线性与稳定性。如 B.2.1.1 节提及,厂家都用高精度校准法(如激光干涉仪)对这些参考加速度计予以校准。假如一定要对未知加速度计本身进行这种绝对校准,那么要特别注意,电荷放大器、信号适调器和实际滤波器的影响可能会使校准失去意义。然而,对包括放大器、滤波器、前端在内的整个系统进行校准,常常更为合理,因为实际试验中用的正是这样的系统。

阵列校准(参考文献 b.2.7)是背对背原理的推广应用,用于同时校准许多个加速度计。这种校准器基本上是个刚性平台,加速度计装在平台上预先定好的位置。平台的运动由多个高精度石英加速度计测量。在这些测量的基础上,根据刚体运动假设及每个加速度计在平台上的准确位置,各加速度计的运动则可以与其电输出进行比较,完成校准。

当前,许多厂家提供小尺寸手持式校准器。考虑到加速度计的重量,校准器内有一伺服机构,保证在规定频率上(例如 1 000 rad/s 或 160 Hz)产生给定的加速度量级(如 10 m/s², RMS)。由于这种校准方法在单一频率上进行,因此要假定在感兴趣的频率范围内加速度计的响应是平坦的。这种小型校准器对于多通道测量装置的校准,是一种很不错的工具。

B.2.1.4 比值校准

图 b.2.4(参考文献 b.2.3)表示对加速度与力的比值进行校准的一种装置。标准的模态分析试验就需要准确测量这一比值(a/F)。此装置中在力传感器和加速度计之间刚性连有一已知质量,用任何适当信号(冲击、随机、正弦...,见下篇 B.3 章)都可以通过力传感器对这一组合体予以激励。对于随机或正弦试验,这个组合体安装在激振器上,而对于锤激试验,质量-加速度计组合(因力传感器在力锤上)要象个摆一样悬挂起来。设读出电压为 E ,灵敏度为 S ,根据牛顿定律($F = ma$),比值灵敏度就是 $S_a/S_f = m(E_a/E_f)$ 。这种方

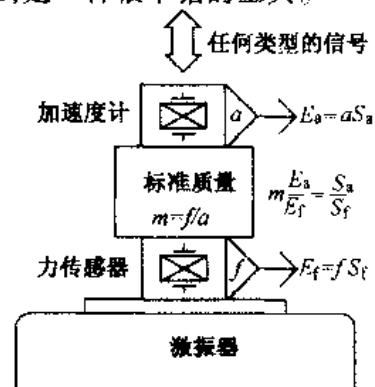


图 b.2.4 加速度与力的比值校准装置

法可对包括滤波器、放大器、信号适调器、数采前端……在内的整个测量系统进行校准,而且是在感兴趣的频率范围内同时完成。校准结果是一条覆盖该频率范围的校准曲线。这条校准曲线可对每一频率上的测量给出校准值,也可以给出整个频率范围内的平均整体校准系数。

B.2.1.5 小 结

本节叙述了几种校准方法,其中最常用的是在多通道模态分析试验中试验工程师校准所有传感器所用的手持式校准器。在这个过程中,工程师也可以检查各测量通道是否正常,或者是否有信号丢失。下一步,他将利用其中一个校准过的加速度计对所有力传感器进行比值校准。由此加速度计的灵敏度和比值灵敏度即可得出力传感器的灵敏度。作为另一种方法,跌落校准有一定价值,但多少有些麻烦。

事实上,这一步校准工作是规定试验设置的一个必不可少的部分,因此与下一节讨论的内容密切相关。

B.2.2 试验设置

B.2.2.0 引 言

建立一个模态分析试验之前,聪明的做法是清楚地确定试验本身的目的。试验设置的复杂程度主要决定于试验目的。从这一角度来看,有以下一些重要问题:

- 本项试验应当产生什么样的结果? 只要共振频率? 要不要阻尼? 模态振型要不要换算? 要复模态还是纯模态? 要窄频带模态模型还是宽频带模态模型? 要不要准确的频响函数(不需要模态参数)?

- 结果将如何使用? 确定与有限元模型的相关关系吗? 根据试验所得结果进行再设计吗? 与从类似试件所得结果相比较吗? 对照规范条件进行验证吗? 用于振动问题故障排除吗?

- 要求什么样的精度与分辨率? 粗略估计够用吗? 需要很精确的结果来处理关键性问题吗?

对这些互相关联的问题的回答,在极大程度上决定着测量方法、试验设备和所需财力,制约着诸如结构固定系统、激励类型与位置、力和运动传感器的型号及安装点、频带宽度、数据块尺寸大小等等这样一些项目的选择。

在设计合理的试验设置时,一个重要的规则是充分利用一切可用的有关信息,例如试验前有限元计算结果,以前对类似结构进行试验的经验和结果,使用传感器和测试设备的经验等等。

模态分析试验是从双通道(一个输入,一个输出)试验到多通道(可多至几百个)试验(如4个输入,200个输出)历史地演变而来的。这就是说,当初,试验设置所花时间较少,而测量所花时间却很长;如今,设置时间较长,测量时间较短,因而用同一种设置可以完成若干个试验(例如不同的激励量级、不同类型的信号或测量点等),只需略微多花点时间。

B.2.2.1 悬挂 边界条件

为了能够对结构进行试验,试件与环境之间总得有某种连接。试验工程师时常可以在某种程度上对连接的方式、强度及位置作出选择。连接方式决定于试验目的。试验目的主要有三种情况:与有限元模型进行比较,在常规工作条件下测量试件的动态特性,或者是对规定边

界条件下的子结构进行试验研究,使之与整体结构相适应。

当试验的主要目的是与有限元结果相比较时,那么试验边界条件应与有限元模型边界条件相一致。很多情况下,这些边界条件是自由-自由条件,这意味着试件与环境之间不存在连接。实际上,用很软的绳子(或某种类似的东西)将试件悬吊起来只是自由-自由条件的近似。为了使这种悬吊的影响减到最小,悬吊试件的连接点应当选择处于或接近于尽可能多的模态的节点上(因此要寻找对称点,避免选择柔性端)。这对于准确估计小阻尼结构的阻尼是特别重要的。从试验前的有限元分析得来的模型将是非常有用的信息。柔软悬挂使刚体共振频率从理论上的 0 Hz 偏移到稍高一些的频率上,因此悬挂绳要足够软,以便保证刚体共振频率远低于第一阶弹性体共振频率(例如小于 10%)。同时还要防止悬挂装置本身(可视为连续质量-刚度-阻尼系统)的共振频率接近试件的变形共振频率,因为悬挂装置的共振频率可能把试件的变形共振频率分裂成两个好像具有同样振型的共振频率。质量很轻阻尼又很小的结构对这一现象可能很敏感。作为一个例子,图 b.2.5 表示一个结构,其中悬挂点如图中所指,应选在上梁,因上梁上的点几乎是所有模态的节点。

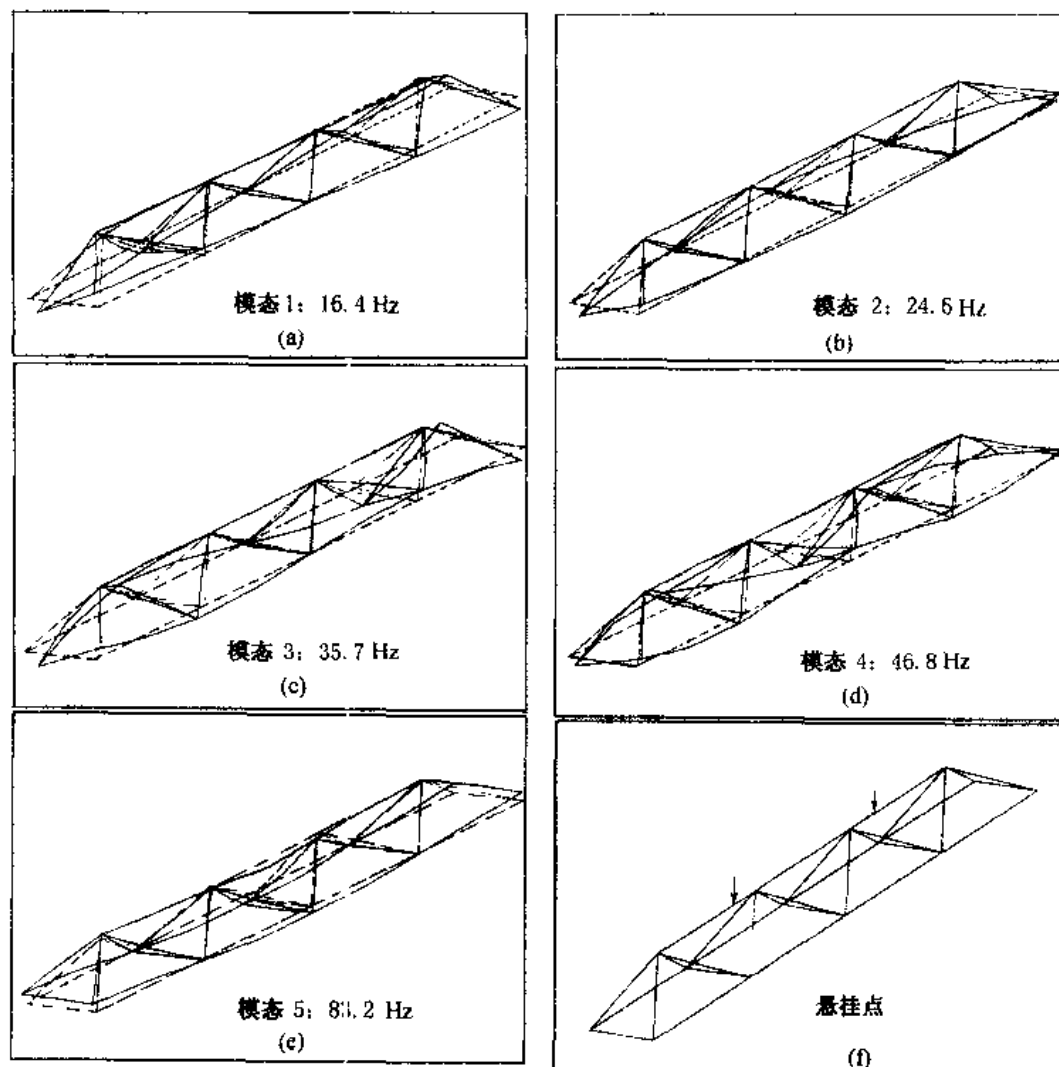


图 b.2.5 空间桁架结构:振型(a~e),最佳悬挂点(f)

理论上虽然还有其他一些边界条件如固支或铰接,实现起来好像容易些,但事实并非如此。实践经验告诉我们,实现近乎理想的固支是非常困难的;而非理想的固支连接时常引起共振频率与振型相当明显的改变。

当试验目的是确定试件在工作条件下的动态特性时,边界条件应尽可能与工作边界条件相匹配:一部汽车应四轮着地作试验,一台机床应安装在(隔离)基础上接受试验。别的边界条件都只能是近似的。卫星实际上具有两个主要边界条件:飞行在空间时是自由-自由的,安装在发射火箭上时则是固定的。飞机的工作边界条件不是那么明显:它们好像是自由-自由的,但流过机翼和机身的空气肯定具有某种加强作用。旋转机械静止时的刚度与它运转时的刚度是不同的,这是由于轴承中油膜的动刚度特性造成的。尽管有这样那样的困难,因为我们的主要目标经常是确定结构在工作条件下的动态特性,所以在模态分析试验中,试验工程师应尽其所能模拟结构的工作条件。

A.5.3 节讨论了几种根据子结构的动态特性来估计整体结构的动态特性的方法。子结构的边界条件常常在理论上是明确规定的,例如子结构与整体其他部分之间所有连接点都是理想的紧固。但如上所述,实际上这是很难实现的。这些实际困难就限制了根据测量数据进行结构动态综合的精度和实用价值。

B.2.2.2 激励

试验工程师要多准备几种激励方法和激励信号,还必须选择激励点的数量和位置。

可以采用的激励方法主要有两种:一种是电动激振器与试件相连,另一种是锤击激励(见 B.1.1 节)。后者的两个主要优点是设置简单,不会影响试件的动态特性(例如不会受附加质量的影响),主要缺点是能量集中在很短的时间内,容易引起过载和非线性问题,而且对于大试件需要很多次敲击。前者的主要优点是可以采用多种多样的激励信号(见 B.3 章),主要缺点则是设置麻烦,并且(特别是对轻型试件)存在附加质量影响问题。

当前一个很强的趋势是采用多通道输入试验方案。多路输入可以更好地把输入能量分配到整个试件上(这对于大试件是很重要的)。这种办法可以最大限度地减小因激励点刚好选在某阶模态节点上而使该阶模态激不出来的机会。对于具有重根的结构而言(如圆桶,圆盘或方板等对称结构),只有采用多输入测量才能检测出这些重根。多输入试验法可以在稍长一点的时间内得到更多、更一致的数据;可同时测出频响函数矩阵的多列。

一般,试验工程师要分别将几个激振器固定在空间适当位置上,这样可使能量在试件上的分布更合理,并减小激振器间的相互影响。这后一点很要紧,因为输入信号应当是不相关的(见 A.2.6.4 节)。

试验工程师要确信各个方向的模态都能激出来,应当使各激振器指向不同的方向。靠近模态反节点的激振器能够把这些模态很好地激出来,然而此时激振器所可能施加的质量载荷效应将比较大。在某些情况下,工程师的目的可能是将耦合紧密的模态清晰地分离开来,这时他可以把一个激振器定位于第一阶模态的一个节点处,而另一个激振器定在第二阶模态的节点上,这样得到的两组传递函数中都是只有其中一个模态占主导地位。图 b.2.6 表示在空间桁架结构上选择的激励点和激励方向。

使用电动或液压激振器时,激振器和试件之间必须有一种连接物。这连接物常常是一根细杆,它只能把激振力沿力传感器的测量轴方向传给结构,所有其他方向上的力应减到最小。

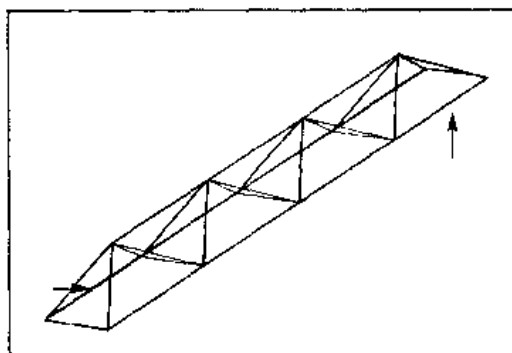


图 b.2.6 空间桁架结构;激励点和激励方向

因此连接杆一般是轴向刚性,径向柔性。但连接杆仍然要具有足够的刚度,不使它自身的共振频率引起力谱的急剧降落(见 B.2.3.1 节)。

B.2.2.3 响应点

试验工程师还必须选择响应点的数目和位置。

响应点的数目取决于所选频率范围、期望的模态数、试件上我们所关心的区域、可用的传感器数以及时间。高频模态的振型驻波波长比较短,所以要恰当描述这些模态就需要比较多的响应点。在试件上我们可能有一些特别感兴趣的区域需要仔细研究,因而在这些区域应多布一些响应点。时间和现有的传感器数目在实际上也限制了响应点的数目。

除了在感兴趣区域多布响应点这个原则外,使响应点在试件上某种程度地均匀分布是比较好的做法。这样可以减少漏掉模态的机会,通常能够得到像样的结构线框动画。只有当试验工程师确信在某特定方向不会出现重要的运动时,才可置此方向于不顾。当试验目的是验证有限元模型时,如果所选响应点位置与有限元模型的自由度一致,就可以使二者之间的相关过程简化。

假如响应点数目不足,或响应点位置选择不当(例如缺少一个方向上的测量),就有可能使可观性条件(见 A.1.0 节)遭到破坏,即没有测到结构上重要部分或重要方向的运动。模态分析结果中,如果在两个很不相同的频率上出现两个非常类似的振型,就很有可能表明上述情形发生了。图 b.2.7 就一个简单的三自由度系统说明了这个道理。如果测量只包含自由度 1 和 2,那么模态 2 和 3 看起来就非常相似。

作为一个大致的规则,我们应根据试验目的要求,测量尽可能多的响应点。如果分析之后才发现某些重要自由度测量时被漏掉了,这总是一种令人悲哀的经验。万一响应测点数很有限(例如在轨运行的卫星上),则必须仔细研究最合适的测点位置。参考文献 b.2.5 和 b.2.6 叙述了一些数学方法,在这方面对工程师们会有所帮助。

在轻型结构上或一结构的某一轻型区域粘贴许多加速度计,有时会引起相当大的质量载荷效应。必须考虑这种效应。例如,如果为了遍测试件上各不同点而到处移动传感器,那么对于每一次测量,试件的质量分布都是不相同的。这就破坏了时不变条件(见 A.1.0 节)。在所有测点位置贴上质量相同的“哑”加速度计会减小上述影响。利用质量灵敏度分析(见 A.5.2 节)可以对测得的模态参数进行修正。

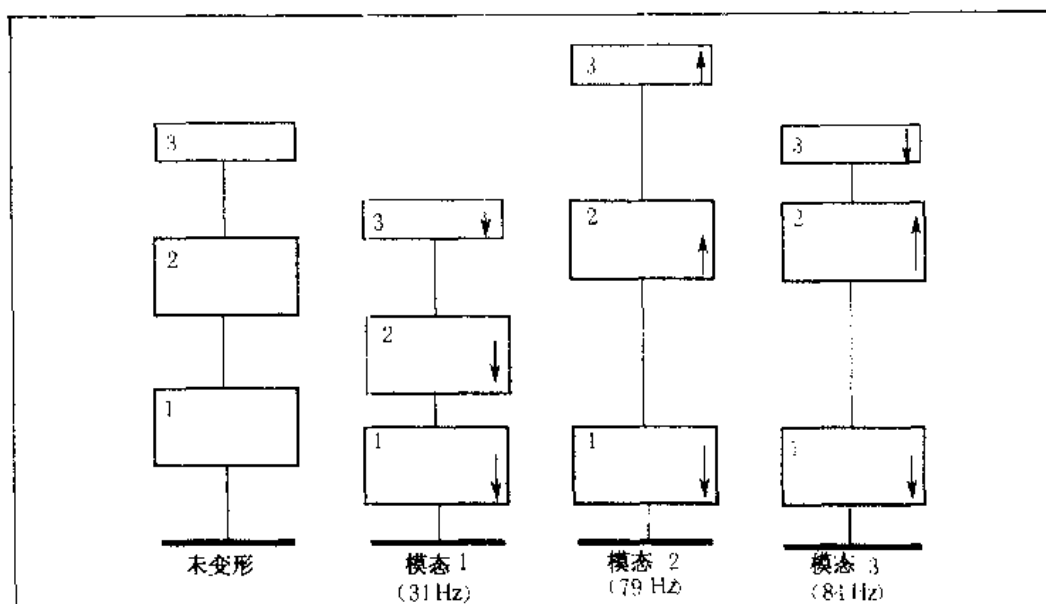


图 b.2.7 三自由度系统,只测自由度 1 和 2

B.2.2.4 设备 传感器

上一章(B.1 章)讨论了许多有关选择传感器和设备的问题。力传感器和响应传感器的选择主要决定于频率范围、振动量级、允许的质量载荷大小等。选择其他设备时,可用性常常是个决定性因素。一般,传感器和仪器设备的复杂程度随试件尺寸的大小、所要求的精度以及试验重要性的增加而增加。

仔细校准整个测量系统永远要走在试验实际开始之前。校准需要的精度也与试验目标有关(见 B.2.1 节)。

B.2.2.5 试验程序的确定

这一步假定实验装置的硬件部分已经确定,那么试验程序主要是决定下列问题:

- **激励信号类型。**随机、猝发随机、正弦、锤激...(见 B.3.1 节)。
- **激励信号频带。**通常比较好的做法是要避免激励信号的频率超出关心的频带之外,否则频带外的信号可能会占据测量系统动态范围的很大一部分,从而降低频带内数据的精度。
- **通道规定。**每个通道都与一个具有特定校准系数的特定传感器相连接。将此信息输入测量系统虽然时常是一件十分烦人的事,但必须仔细去完成。这一信息对于可能的重复试验,或对于找出实验模态分析的后一阶段中可能冒出来的测量问题,都是至关重要的。
- **触发规定。**如果激励信号(如猝发随机)是由数采前端产生的,那么触发规定应当与前端的信号源相一致。锤击激励要求很小的预触发,这是为了保证完整的输入脉冲都能被记录下来。随机激励时,自由运行触发是最常用的触发方式。A.2.6.3 节讨论了同步平均和异步平均。
- **信号处理参数。**工程师要规定数据块大小、测量频带的宽度(A.2.2 节)和平均次数(如果测量系统允许这么做的话)。总的测量时间(同时还有测量精度)将随着平均次数的提高、数据块尺寸的加大和最高频率的降低而增加。工程师还要确定抗混滤波器的设置;最经

常的是设置在最高频率的 80 % , 这对应于采样频率的 40 % (Shannon 采样定理, A.2.4.1 节)。为减少泄漏, 还得选择合适的窗 (A.2.4.2 节)。一般, 对 (纯) 随机信号加汉宁窗, 对锤激试验加力窗和指数窗, 而对于猝发随机信号不加窗 (有时加指数窗)。再进一步, 要规定测量什么函数 (最经常的是频率响应函数和相干函数) 以及怎样估计这些函数 (H_1 , H_2 还是 H_3 ? 见 A.2.6.4 节)。

应当明了, 规定适当的试验程序这一步是一种试探过程, 在此过程中试验工程师经常必须折衷考虑问题。例如时间可能限制了精度, 可用设备可能限制着数据块的大小。小阻尼结构可能需要大数据块, 这是为了让信号在观察时段内衰减掉, 或者为了得到足够窄的频率间隔以便正确描述共振峰 (图 b.2.10c 给出了一个小阻尼频响函数, 其频率间隔就不够小)。这样做会使时间加长; 但如果外部噪声较小, 则可以适当减少平均次数以补偿时间的拉长。

B.2.2.6 小 结

上节尚未讨论的一个重要问题是, 建立一个好的模态分析试验时, 试件本身应当满足一些基本条件。它应当是时不变的 (例如它不应含有泄放液体箱)。它还必须是可观的。如果结构的重要部分不可触及因而不能安放加速度计, 则可观性条件可能遭到破坏, 试验者一开始就应当格外小心。最后然而并非最不重要的是, 结构应呈线性动态特性。明显的非线性, 如松动部件或间隙等, 应当消除 (例如旋紧)。B.2.3.2 节将讨论一些线性检查方法。

关于建立常用的模态分析试验的大致规则是:

- 试件安装应尽可能接近实际工作边界条件。如果用柔软悬挂形式模拟自由-自由条件, 那么结构悬挂点应当是节点。
- 激励应尽量靠近重要模态的反节点。多点激励测量数据量大, 一致性好, 因此有许多优点。
- 响应测点应均匀分配在试件上, 但特别重要的区域可多布一些点。
- 所选传感器应满足频率范围和灵敏度要求。
- 试验程序总是对时间、成本、精度、可靠性等因素综合考虑的结果。

特殊试验 (很轻或很重的结构、极端的温度或重力环境, 如空间轨道环境) 将要求特殊的设备和设置条件。

B.2.3 FRF 测量 设置验证

B.2.3.0 引 言

试验设置和试验程序确定之后, 试验即可开始。首先测量一组数据, 据以检查试验设置和程序是否正确。对测量下来的函数如力的自功率谱、原点频响函数、跨点频响函数、相干函数等的解释, 将有助于判断测量设置的正确性。

一旦上述测量证实测量设置和程序完好, 即可开始测量所有必要的频响函数。

B.2.3.1 设置验证

这一步是利用第一组测量数据来检查各输入通道的系数、互易性、原点特性、线性特性、各

输入力信号之间的相关性等诸如此类的项目。

首先考察输入力的自功率谱。

在随机激励情况下,这些自功率谱可能是杂乱的,但在所选频带内应保持大致相同的量级。如果自功率谱在某些频率降为零,这表明在这些频率上没有能量经由激励点进入系统。这种情况不能接受。如果真是这样,则要另选激励点或更换传力杆才可能解决问题(B.2.2.2节)。但自功率谱在共振频率附近有一定量的下降还是可以容忍的(例如图 b.2.8 中,在 16.4 Hz, 83.2 Hz 及与柔性局部模态相对应的 130 Hz 到 200 Hz 的较高频率处的下降)。

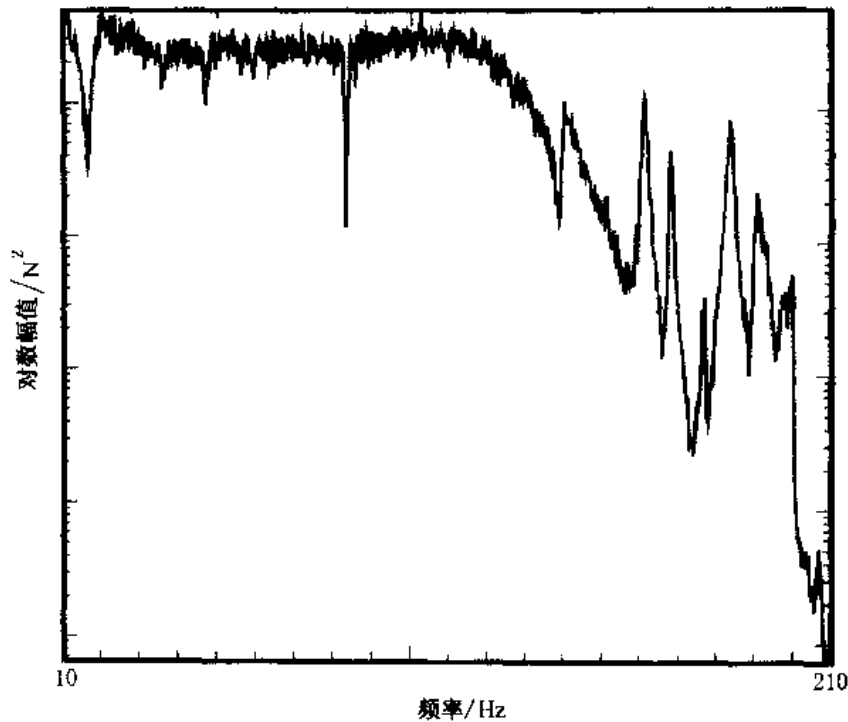


图 b.2.8 典型的随机激振力的自功率谱

在锤激情况下,冲击输入力的自功率谱在所选频带内应当干净而平坦。如果自功率谱有剧烈的波动,则表明敲击时连击,因而引入了某种误差(见附录 AA.2.1 和 B.3 章)。

多通道输入试验中可以在频响函数级别上检查互易性。Maxwell 互易原理(A.1.0 节)说,跨点频响函数是相等的: $H_{12} = H_{21}$, 其中 1,2 表示第一、第二个输入自由度。如果这两个跨点频响函数的幅值形状相同,只是相差一个常数,这说明很可能是校准输入力时出现了误差。跨点频响函数失配可能是输入力的问题(见上),但在原点频响函数中也可能有同样的失配问题。例如图 b.2.9 表示对空间桁架进行的互易性检查,发现 83.2 Hz 共振频率上出现了不一致,这是由于某个激振器安装得非常靠近该阶模态的某个节点这一事实造成的。在这样的情况下,加速度计位置稍微偏一点即可引起这种不一致。

在激励点上,因为结构位移直接由相应的力驱动,其简谐位移不能与相应的谐波力反向,所以,位移对力的原点频响函数的虚部在整个频率范围内应当都是负的(对加速度频响函数虚部则是正的!),所有响应峰值都在零轴的负边。在波德图上,幅值曲线将表明每一对共振频率之间有反共振存在。在共振频率点,相位总是从 0° 经 -90° 降至 -180° ,而在反共振点,相位则从 -180°

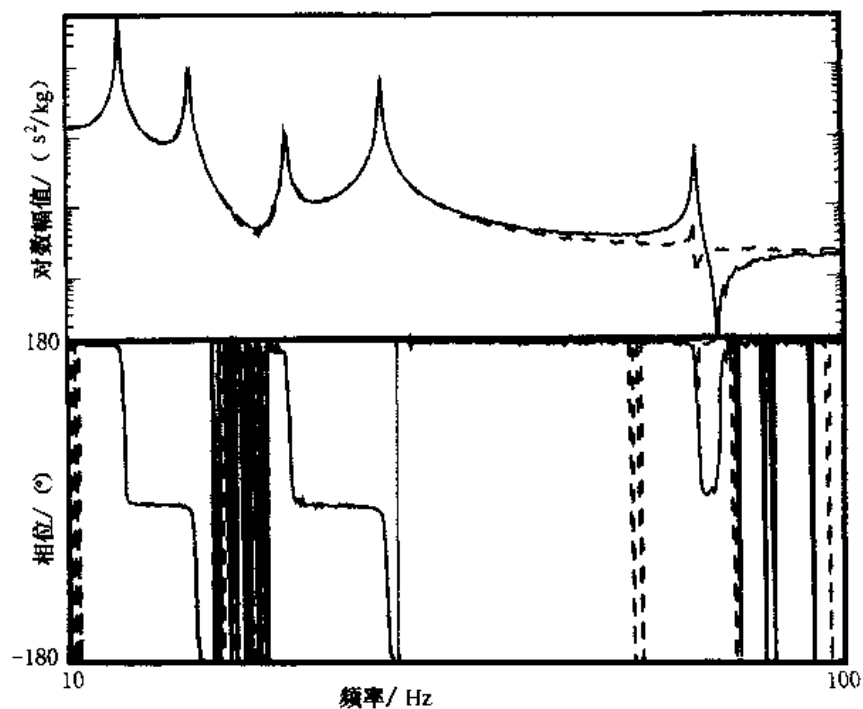


图 b.2.9 用跨点频响应函数检查 Maxwell 互易性

变到 0° 。在奈奎斯特图上,所有共振圆(事实上是整条曲线)都处在实-虚平面的负虚边。

如果情况不是如此,原点测量的设想就不对了。这可能是由于这样的事实:准确测量激励点的响应实际上常常是做不到的。因此,特别是在高频时,激励点的响应可能违背典型的原点

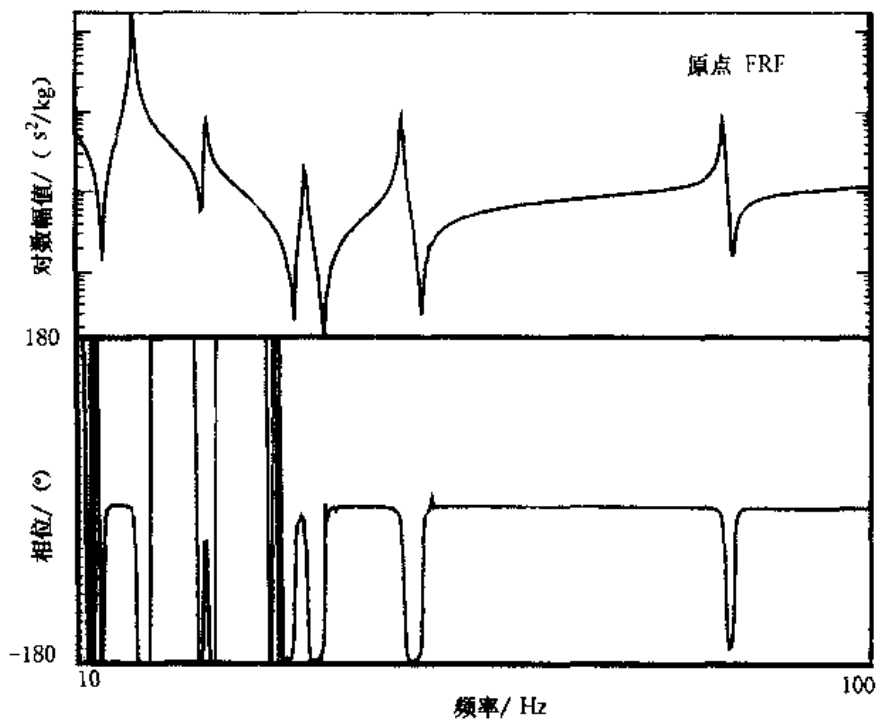


图 b.2.10a 典型的原点频响应函数(幅值与相位)

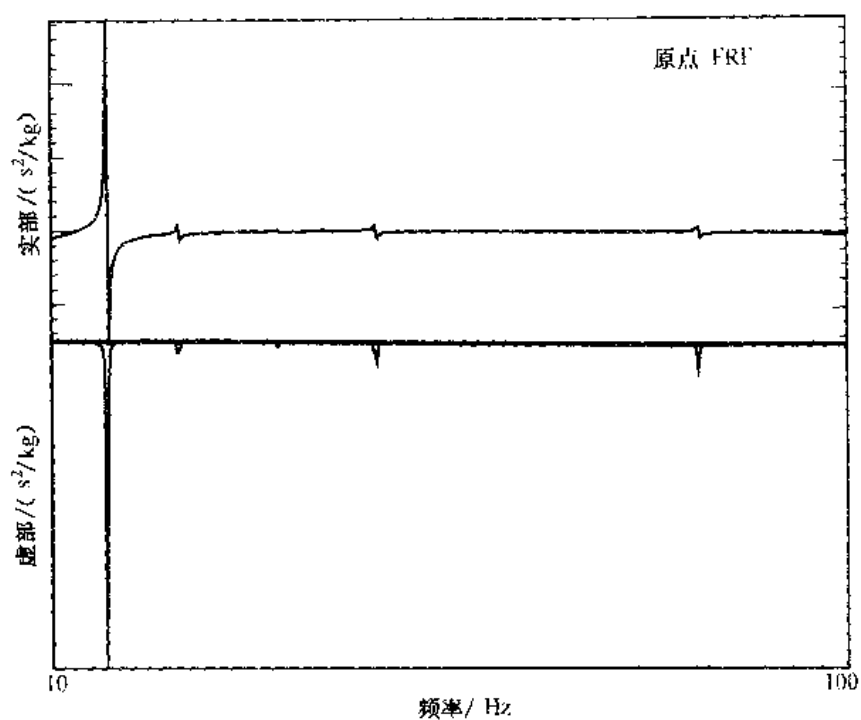


图 b.2.10b 典型的原点频响应函数(实频与虚频)

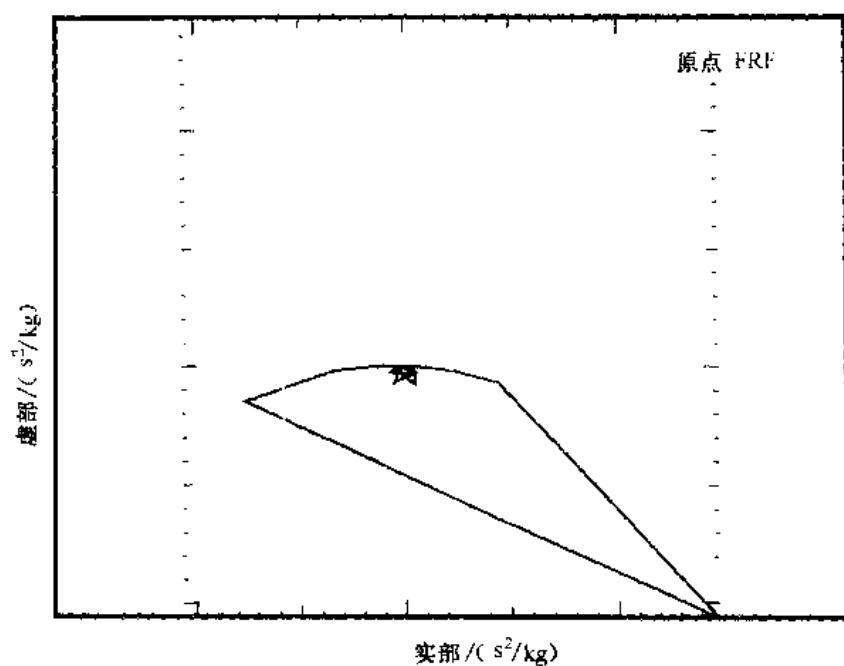


图 b.2.10c 典型的原点频响应函数(实频对虚频)

频响函数的特性。图 b.2.10 给出了几种典型的原点频响应函数(相位在 180° 或 -180° 左右的散布是由于测量噪声造成的)。

如果结构的动态特性是线性的,那么频响应函数应当与激振力的量级无关。分别用几种不

同量级的力测量传递函数可以向工程师们表明结构的线性特性。检查结构线性的另一种方法是用正弦信号激励试件,所得响应也应当是正弦波。如果结构特性呈现出非线性,试验工程师可以尝试通过平均方法将此非线性平均掉(例如随机激励,见 B.3 章),使结构特性线性化。对于微小的非线性,这办法是可行的。平均掉这些小的非线性仍然允许应用模态分析理论。在其他情况下,工程师要尽力辨别这种非线性并确定其量的大小(使用正弦激励,见 B.3 章)。

我们在 A.2.6.4 节曾经说明,在多输入情况中各输入力之间应当是不相关的。直观上很容易理解,如果这些力相关,那么在具体某一点的总响应就不能分解成来自各输入力的贡献。各输入力之间不相关,在数学上意味着平均输入功率矩阵 $[\hat{G}_{FF}]$ 将是非奇异的。在两输入情况下,二力之间的相干性是它们相关性的量度;在所选频带内的任何频率上它都不应是 1。对于两个或两个以上输入信号的情况,对每个频率上的输入功率矩阵进行奇异值分解,会产生数目等于输入信号数的几条曲线。图 b.2.11 表示不相关信号和相关信号的主分量。

平均输入功率矩阵的扩展(用于 H_x 估计器中,见 A.2.6.4 节)

$$\begin{bmatrix} [\hat{G}_{FF}] & [\hat{G}_{FX}] \\ [\hat{G}_{FX}]^T & [\hat{G}_{XX}] \end{bmatrix}$$

可以指明可能存在的未知不相关输入。因为响应 X 完全由已知输入力决定,所以上面这个矩阵的秩应当等于输入数;秩高了就表明有未知的不相关输入。用奇异值分解可确定上述矩阵的秩。

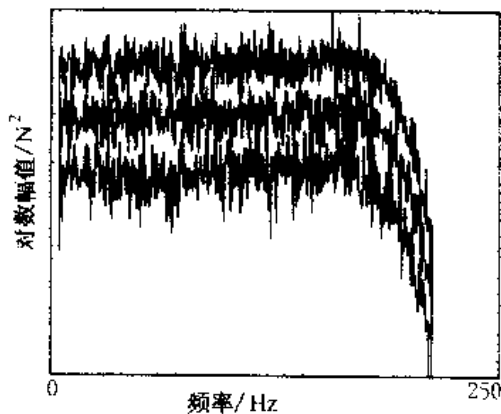


图 b.2.11a 三个不相关信号的主分量

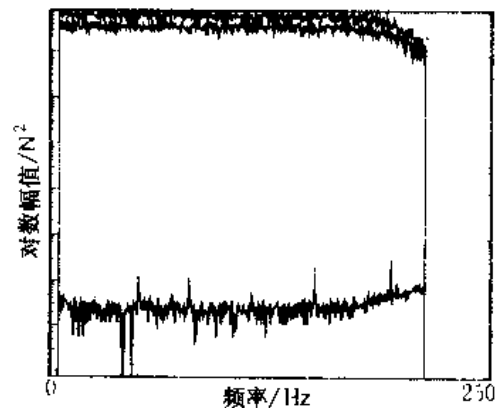


图 b.2.11b 其中一个信号与另外两个信号相关时的主分量

B.2.3.2 FRF 测量

如果前面的正确性验证结果满意,实际测量便可开始。对与所有加速度计的特定位置相对应的每一个测量区域(可资利用的通道数决定了该区域中的响应数),各加速度计的具体位置必须输入到测量系统。反复核对这一信息是一种很好的做法,因为这一层次出现的错误信息事后检查起来常常极为困难。然后,为了最大限度地利用测量系统的动态范围,要给测量系统的各个通道设置放大系数(自动方式或人机对话方式)。我们力主于测量开始前在示波器或数字信号分析仪上查看某些(或全部)时间信号,这将有助于发现“怪异”信号或信号脱漏。

这些预备工作做好之后,就可以开始测量频响函数和对应的相干函数了。相干函数是一个相关系数,它告诉分析者频响函数各次平均的一致性程度(A.2.6.4 节)。相干函数等于 1

表明每次平均完全相同;相干值很低表示各次平均存在(相当大的)差异。许多加速度计和力传感器在低频时特性变坏(B.1.2节),所以低频段数据常常应当舍去。又因使用了抗混滤波器,所以采样频率的40%以上的数据应当略而不顾(B.2.2.5节)。反共振频率处的信噪比较小,因而相干函数值常有所下降,这在一定程度上与激励信号有关(见B.3章)。反共振频率附近相干的降低一般不会引起什么严重问题,因为模态分析的兴趣集中在共振频率附近的信息。相干函数在共振频率点下沉通常表明有泄漏问题。假如不能改善相干比较差的测量数据,那么比较好的做法是把它与对应的频响函数一起存储备忘,并由相干函数确定频响函数的置信区间。

按各种不同的方式审视频响函数也是一种好的做法(例如图b.2.10)。对于小阻尼结构,其频响函数虚部的共振峰是否干净?其实部是否在共振频率处通过零点?其奈奎斯特图在共振频率处是否呈现为圆(或近似三角形;这表明频率分辨率太低)?其幅值图和相位图在反共振点处是否干净(不毛糙)平滑?

B.2.3.3 小结

本节讨论了怎样利用原点测量和跨点频响函数测量检查试验设置质量的好坏。我们强调的是,每次模态分析试验之前都要以不同量级的力和(或)正弦激励进行线性检查。在多输入试验中,可以采用相干函数或奇异值分解的办法来检验输入力之间是否不相关。

确定测量点,调整、优化放大系数并迅速检查时间信号之后,就可以开始测量频响函数和相干函数了。仔细查看一下所测到的频响函数和相干函数,有助于减少模态分试验后面阶段中的错误。

B.2.4 结论

本章概括介绍了许多模态分析试验设置的实际含义。

第一节说明,对测量系统进行校准不但是必需的,而且是获得关于传感器与测量系统之经验的良好途径。采用手持式校准器的绝对校准法对于校准加速度计是最实际的工具。校准力传感器时最常用比值法。

第二节讨论了模态分析试验的大部分实际考虑,并说明在一般情况下,试件的边界条件应当与工作时的边界条件相当,或模拟自由-自由条件(例如用软绳将试件悬挂起来,连接点的运动要很小)。进而还讨论了多输入的好处及一些实际结果。最后讨论了试验程序的设定(频带选择、数据块大小…)。

最后一节研究了试验设置的正确性检验问题。我们强调检查输入力的自功率谱,检查原点测量,检查跨点频响函数(互易性),检查系统对不同量级的力及正弦激励的响应(线性),检查输入力之间的相关性等等这一系列检查的重要性。本节还指出,测出频响函数和相干函数之后立即予以仔细检查,可以最大限度减少后面模态参数估计阶段中的错误。

B.3 章 激励考虑

B.3.0 引言

实验模态分析的目的是测量系统的模态参数,即共振频率,阻尼系数和模态振型。这些模态参数描述了系统的振动特性。如图 b.3.1(B.3.1 节)所示,模态分析实验研究的一个重要环节是给结构施加一个动态激励。激励可以加在结构的单一个作用点上,也可以同时加在多个点上。施加激励的目的是使结构在所选定的频率范围内振动起来,并要求所施动态力是可以测量的,结构对激励力的响应也是可以测量的。数据分析系统将把收集到的信号数字化,并用它们计算频响函数。频响函数是估计模态参数的基础。显然,激励是模态实验过程的重要组成部分:它使结构产生振动,这是通过实验研究任何物体的动态特性的必要条件。

20 世纪 60 年代初期,频响函数的测量是建立在模拟信号处理基础上的。跟踪滤波器的问世要求使用缓慢变化的窄带信号,从而导致了几乎是无例外地采用正弦扫描输入信号来测量频响函数。数字傅立叶分析仪的出现表明频响函数测量前进了一大步。数字分析仪能快速而准确地计算时间信号的频谱(数字傅立叶变换)。因为频响函数定义为输出的傅立叶变换除以输入的傅立叶变换,所以对输入信号的惟一要求是它是绝对可积的,能进行傅立叶变换。事实上,所有物理信号都满足这一“限制”条件。由于这个进步,激励信号的选择几乎成了无穷的。从线性系统理论的观点看来,估计出来的频响函数应当与激励信号的特性无关。尽管如此,考虑到大量实际问题,适当选择激励信号可能会大大改善频响函数的测量精度(参考文献 b.3.1)。

本章是根据参考文献 b.3.2 写成的。B.3.1 节描述几类激励信号并加以分类(周期的,暂态的,正弦的…),给出评估准则(设备的复杂性,非线性特性,泄漏问题,测量时间…),然后逐一讨论最常用的一些激励信号并指明它们各自的优缺点。

B.3.2 节将比较细密地讨论激励信号的选择与减小频响函数测量误差之间的相互关系。

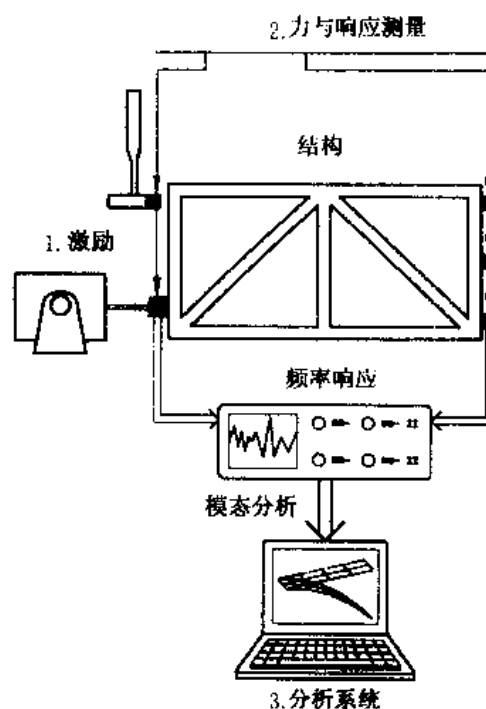


图 b.3.1 模态分析试验框图

B.3.1 激励信号概述

B.3.1.1 分 类

常用的激励信号可以按几种方法分类,但从实用目的考虑分成两类比较合适:宽带信号和单频信号(表 b.3.1)。单频类包括扫描正弦和步进正弦。宽带类包括三种:暂态信号、测量窗内的周期信号及非周期信号。猝发随机、猝发快扫(或称猝发扫描正弦)、冲击激励等信号属于暂态信号。伪随机、周期随机和周期快扫(或称快速扫描正弦)属于周期信号,而纯随机则是典型的非周期激励信号。

表 b.3.1 激励信号分类

宽带信号	单频信号
非周期:纯随机	扫描正弦
周期:伪随机	
周期随机	
周期快扫	步进正弦
暂态:猝发随机	
猝发快扫	
冲激	

随机信号只能根据它们的统计特性来定义。对于平稳随机信号,它们的统计特性不随时间的迁移而改变。所有随机激励信号都具有各态历经随机特性,就是说,信号的某个子样的时间平均与该随机信号的任意子样的集合平均都相同。

参考文献 b.3.3 和 b.3.4 提到了类似的分类。

B.3.1.2 评估依据

激励信号的选择决定于许多因素,如设备的可用性和复杂性、可用时间的多少、信号对系统误差和方差的敏感性、试件的线性或非线性、激励信号的可控制性、所要求的测量精度等等。

必需的设备其范围可以从简单的力锤到由(频率、相位、幅值)可控信号发生器、功率放大器、激振器(液压、电动等)及其与试件之间的连接件等组成的联合装置。B.1.1.1 和 B.2.2.2 节已经提到,把电动激振器通过一根推杆连接到结构上具有某些重要的实际意义。首先,我们要永远明白这样一个事实,送到试件上的力的频谱不会与输入到激振器的电信号完全相同。部分原因归咎于线圈和推杆组成的激振器的机械子系统的动态特性(包括激励系统的力和电信号之间的非线性)。因此,当需要很好控制力的输入时,必须要考虑激振器的特性。其次,因为

把激振器与固定在结构上的单向力传感器连接起来的推杆应当只在力传感器的测量方向上将力传给试件,所以这连杆应当在测量方向上刚硬,而在所有别的方向上很弱。

总的测量持续时间部分地取决于激励信号的选择。首先,信号类型本身对测量时间有很大影响:一个频率一个频率地扫过所选频带来测量频响函数时所用的激励信号(如步进正弦),比宽带激励信号(如猝发随机)要花更多的时间。另一方面,为得到良好的频响函数估计,某些信号比其他信号(如随机信号)需要的平均次数要多。对有些信号来说,一次平均所花时间可能比别的信号(如周期随机)更长。第二,激励设备越是复杂,设置它们花的时间就越多。再者,在试验设置中,所有的力和响应都要在一些限定的多通道“区域”内测量,因此整个系统的设置时间可能大大超过实际测量时间。在这些情况下,考虑激励信号本身耗时长短就没有什么意义了。

多数测量对环境噪声和普通测量误差都很敏感。如果这些误差是随机性的,则可以被平均掉。激励信号的选择能否将这些误差减至最小,其有效性主要决定于信噪比和峰值有效值比。由于实际上的限制(功率放大器饱和、最大输入力限制等),所能加的信号电平也是有限的。这意味着,对于限定的最大信号电平,总的激励能量因而还有相对误差,都直接与峰值有效值比有关。同样,对于给定的激励能量,误差(一般是均匀分布的)有什么样的相对影响,决定于实际信号的频谱(单频,窄带或宽带)。

最重要的系统误差是泄漏。如果被观察信号相对于采样窗不是周期的、或者不是完整的暂态信号,那么正确进行离散傅立叶变换的条件就被破坏了。这样造成的误差就是泄漏,因为位于非周期频率上的能量将“泄漏”到邻近的周期性频率上(A.2.4.2节)。如果存在泄漏问题,采用适当的时间窗可以减少这种误差的影响。

如果被试验结构具有非线性特性,则激励显得尤为重要,因为测量出来的频响函数将决定于激励信号的性质和量级。根据试验目的不同,有各种可能的办法来选择激励信号。如果试验目的是找到结构非线性特性的最佳线性估计,那么有两种激励考虑很重要。第一,我们不希望把系统激励到出现严重非线性的幅度范围内。如果出现这种情况,多半说明要避免采用峰值有效值比高的激励信号(例如冲击)。第二,有些激励信号(例如纯随机)经平均后会得到较好的频响函数的线性化估计。因为实验模态分析的第二步即参数估计适用于建立在频响函数基础上的线性模型,所以避免或平均掉频响函数中的非线性失真是非常重要的。另一方面,如果试验的目的是说明或表征结构动态特性中的非线性,这时采用能良好控制的激励信号如步进正弦更好一些。

在若干情形下(如非线性、所选频率范围有限…),准确控制激励信号的幅度和频率含量显得很重要。用可控信号发生器对适当的输入力的量级进行反馈控制,即可满足这一要求。更高级的控制需要更复杂精密的设备,一般设置时间也长一些。

激励信号的控制精度与要求的频响函数的精度有关。仔细监视输入信号通常将得到更准确的结果,或类似于几次平均后的结果。激励类型的选择、同时激励点和测量点的确定、各不同激励信号之间的相关程度……所有这些因素都影响着结果的最终精度。

B.3.1.3 激励信号类型

这一节利用图形叙述性地概述表 b.3.1 列出的激励信号,包括它们各自的特征和优劣性。

B.3.1.3.1 纯随机

纯随机激励信号是一种具有高斯概率分布的随机信号,它含有规定频带内的一切频率。然而因为它的频谱特性只能用随机方法来描述,所以估计其频谱时,平均就成了基本操作。而且,由于激振器与结构之间的阻抗不匹配,就使得测量出来的频谱可能表现出下降(例如在共振频率附近),注意到这一点很重要。

由于纯随机的峰值有效值比相对较低(典型值为 $3\cdots 4$),因此不相干噪声很容易平均掉。再者,纯随机能给出非线性系统的最好的线性近似,这是因为在每个被平均的时间记录中非线性失真都不相同,平均次数足够多的话这些非线性失真倾向于相互抵消(参考文献 b.3.4)。纯随机激励信号的其他正面特性是:信噪比好,设备相对简单(一个外部信号发生器足矣),RMS 量级容易控制等。

纯随机信号的主要问题是泄漏。这种信号在观察时窗内是非周期性的,因而泄漏误差将不可避免。给输入输出信号加上专门时窗(如汉宁窗),也不能彻底消除泄漏的影响而不致带来不希望的边缘效应,如频率分辨率降低等(A.2.4.2 节)。使用纯随机信号的一个小缺点是,因需要较多的平均次数而使试验时间加长。然而当采用重叠平均时,总的试验时间却会缩短。在重叠平均过程中,每一个已平均的时间记录将含有前一个记录的最后部分。由于所加的抗泄漏时间窗(如海宁窗)在每个时间数据块的开头和末尾使时间数据的幅值减小,所以两次考虑到它们,就使这些数据得到了充分的应用。

图 b.3.2 表示典型的纯随机信号及其傅立叶变换。

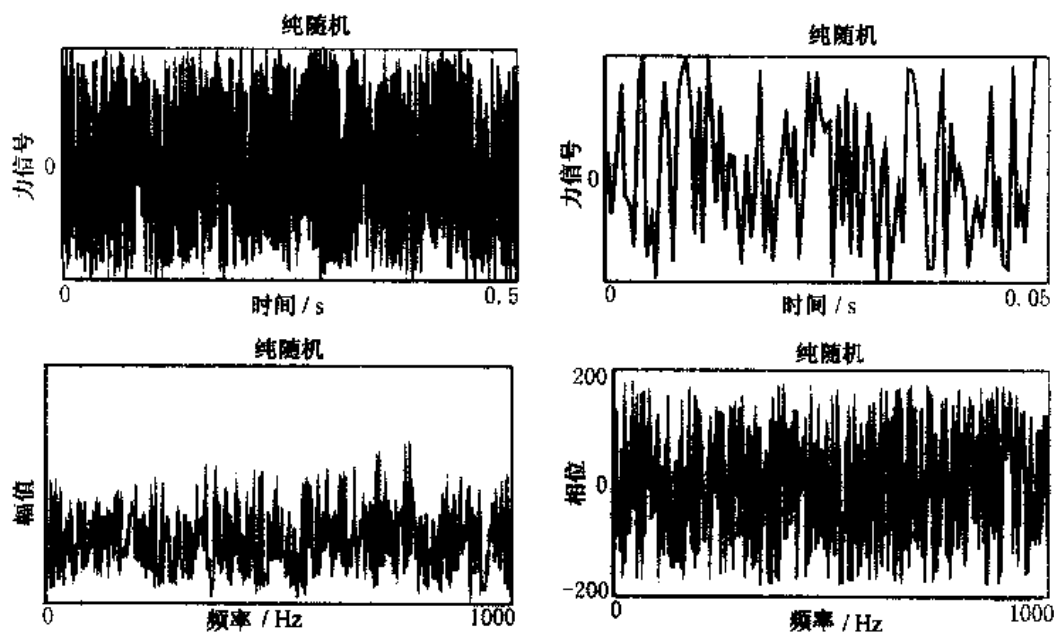


图 b.3.2 纯随机信号:时间和频率含量

B.3.1.3.2 伪随机

伪随机信号是一种各态历经的稳态信号,其频谱仅由离散傅立叶变换频率增量的整数倍

频率组成,因此在采样时窗内它完全是周期性的(参考文献 b.3.5)。这种信号是在频域产生出来的,常具有平坦的幅值谱和随机的相位分布。要得到这样的信号需要专门的硬件(如数-模转换器)。如果有足够的时间使对这种信号的任何暂态响应衰减,那么该响应相对于采样周期也将是周期性的。重复同一个时间数据块就会将不相干噪声平均掉。

由于信号的周期性,故不存在泄漏问题。然而为了平均的需要,同样的时间块要多次重复,因此每一次平均中伪随机会以同样的方式激发出非线性。所以平均不能消除非线性引起的失真。但对于线性结构来说,一般只需要少量几次平均就够了,所以这种激励还是快捷省时的。而且,伪随机有着很好的峰值有效值比,其频谱能平滑控制(除因阻抗失配引起的频谱下陷),允许限带激励。

图 b.3.3 是典型的伪随机信号及其傅立叶频谱。

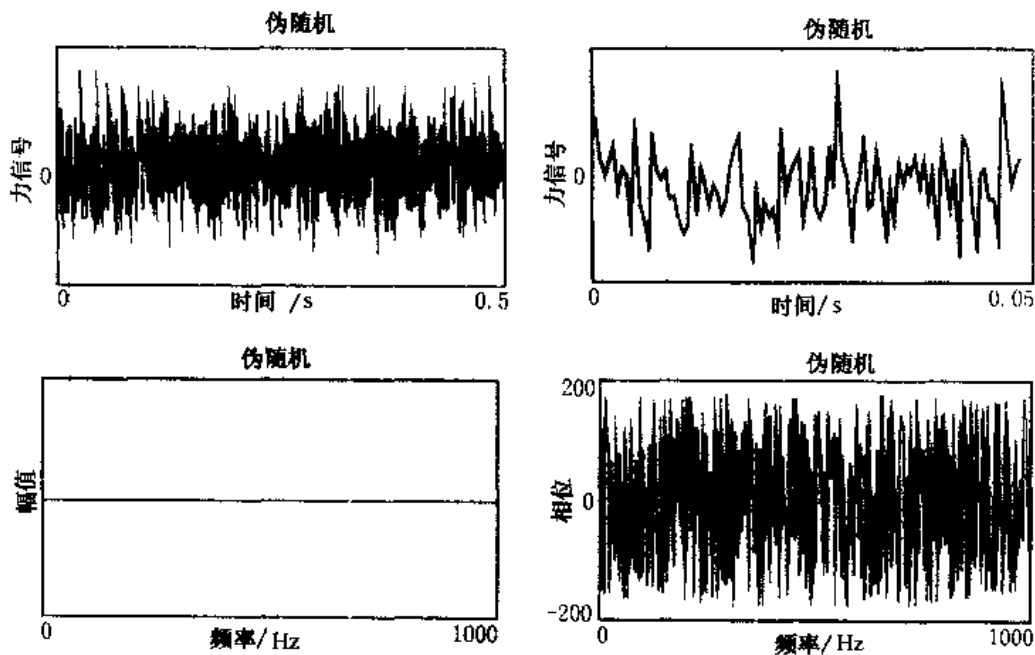


图 b.3.3 伪随机:时间和频率含量

B.3.1.3.3 周期随机

与伪随机激励信号类似,周期随机信号的频谱也是由离散频率构成的,这些频率等于离散傅立叶变换所用的频率分辨率的整数倍。周期随机程序利用随机数码发生器,产生一个幅值和相位都随机变化的信号(参考文献 b.3.4)。该信号以这一时间段重复性地激励结构,直到暂态响应结束而达到稳定状态,此时将输入信号和响应信号记录下来作为一次平均。然后按同样的方式发出一个新的随机信号,并作为激励输入到结构,等暂态响应衰减掉之后记录下第二次平均。

由于这种信号相对于观察窗是周期的,故不存在泄漏问题。与其他信号比较,此种信号的各次平均都是随机变化的,所以每一次平均中出现的非线性效应也是不同的,而且具有相互抵消的倾向。所以说周期随机信号可对非线性系统进行最佳线性近似(参见上段“纯随机”)。此种信号表现出相当好的信噪比和良好的峰值有效值比,其谱可很好地控制(除阻抗失配情况

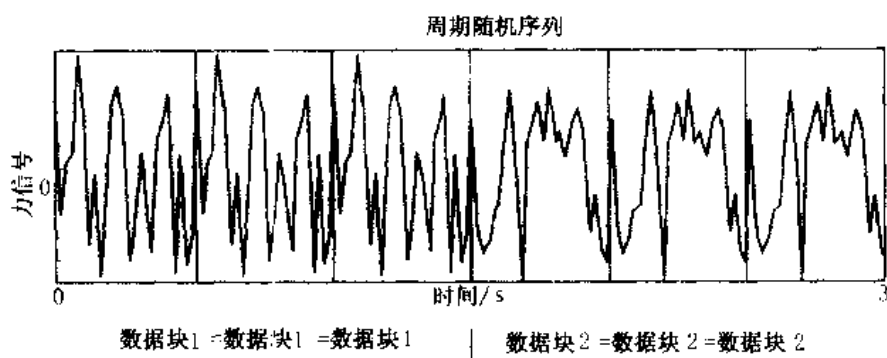


图 b.3.4 周期随机:典型的激励序列

外)。主要缺点是比较慢,尤其是对小阻尼结构,这是因为每一次平均过后需要等待一段时间,使对新发出的伪随机信号的暂态响应衰减到零。同时,对于低频测量或细化测量,这种激励信号需要很长的测量时间,所要求的硬件也更复杂一些。

图 b.3.4 表示典型的周期随机激励序列。

B.3.1.3.4 周期快扫

周期快扫是一种极快的正弦扫描,即频率在数据采集的时段内很快向上和/或向下扫描。此过程不断重复便形成一周期函数(参考文献 b.3.1)。这种信号实际上是伪随机信号的一种特例(b.3.1.3.3 节),因而其特性也类似。

如果有足够时间允许暂态信号衰减,那么不但输入而且输出将都是周期的,并且不会引起泄漏问题。再一方面,这种信号具有极好的峰值有效值比及良好的信噪比。因为每次平均都按同样的方式激励出非线性,因此这些非线性将不能被平均掉,但测量结果将有助于表征这些非线性。该类信号的带宽很容易控制。

周期快扫信号的缺点是在测量结果中存在非线性失真,要得到好的模态参数估计比较困难,而且需要另外的设备产生信号。为了能正确工作,希望数据块要大或频带要窄。

与周期随机类似,也可以在每一次平均时都重新发出独立的快扫信号(如开始和/或终止频率值随机改变),因而使平均特性得到改善。在多输入激励情况中这一点是特别重要的。

图 b.3.5 表示典型的周期快扫信号及其频谱。一般情况下相位包络比伪随机信号光滑得多。

B.3.1.3.5 猝发随机

猝发随机(或暂态随机)信号起始时是个纯随机信号的一个子样,过一段时间后即降为零,以便使响应在观察时间窗終了之前衰减为零。其频谱具有随机的幅值和相位,能量在感兴趣的整个频带上都有分布。图 b.3.6 表示典型的猝发随机信号及其频谱。

信号衰减到零之前的那段观察时间的长短主要决定于被试系统的阻尼,但激励系统的类型也起着重要作用。如果激励系统由电压放大器(即低输出阻抗)驱动,那么能量输入被切断之后,试件结构的运动会使动圈在激振器磁场(B.1.1.1 节)中有一个速度。这个运动会产生一个电压(反电动势),从而引起一个电流通过电压放大器的低阻抗而流动。此电流会产生一

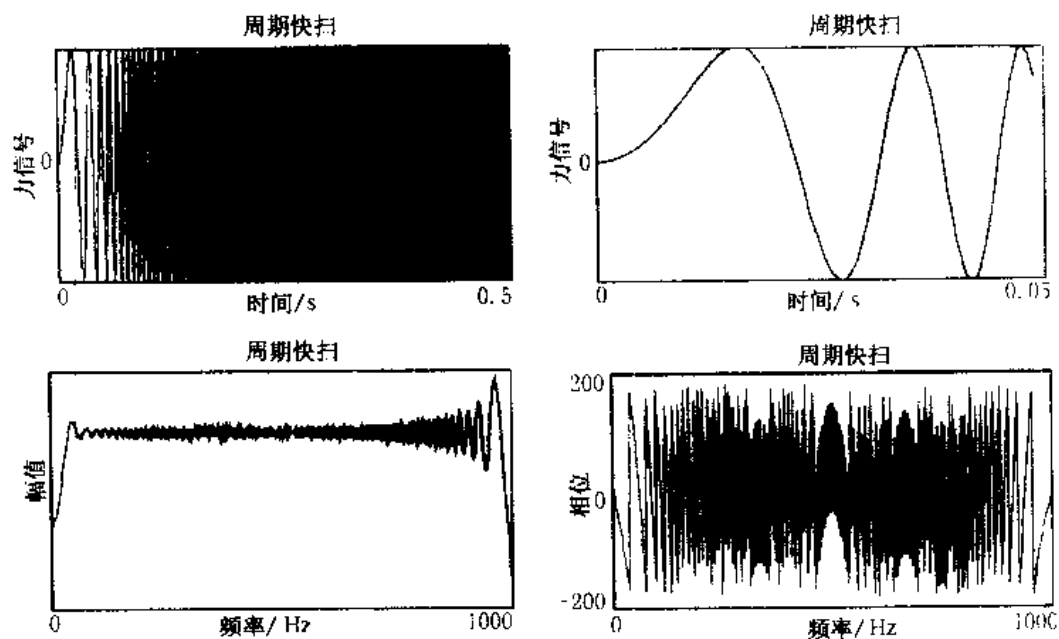


图 b.3.5 周期快扫:时间和频率含量

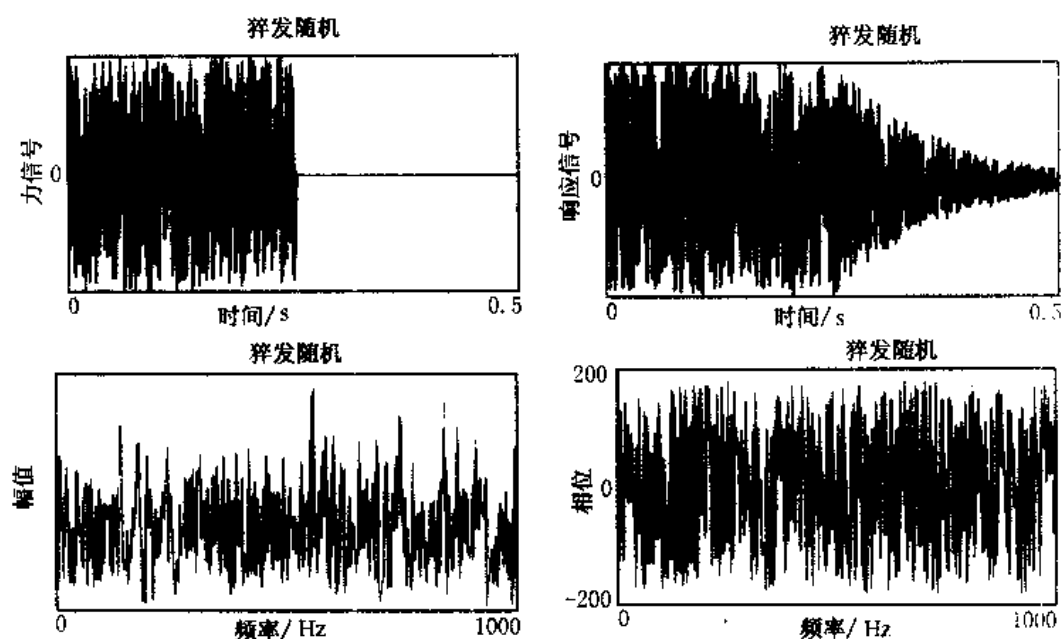


图 b.3.6 猝发随机:时间和频率含量

个阻尼力,加速结构振动能量的消耗。因这个阻尼力被记录下来,故不会在频响函数估计中出现误差。由于这种阻尼力比较大,所以随机激振力可以持续占据采样时间的较长部分而不致引起泄漏误差(图 b.3.7)。类似的理由可以说明,电压驱动放大器将使输入力的频谱在共振频率处的下降更厉害(参考 b.3.4 和 b.3.6),图 b.3.8 表示的就是这种现象。电流驱动的激振器呈现的阻尼较小,输入力的频谱下陷较浅。

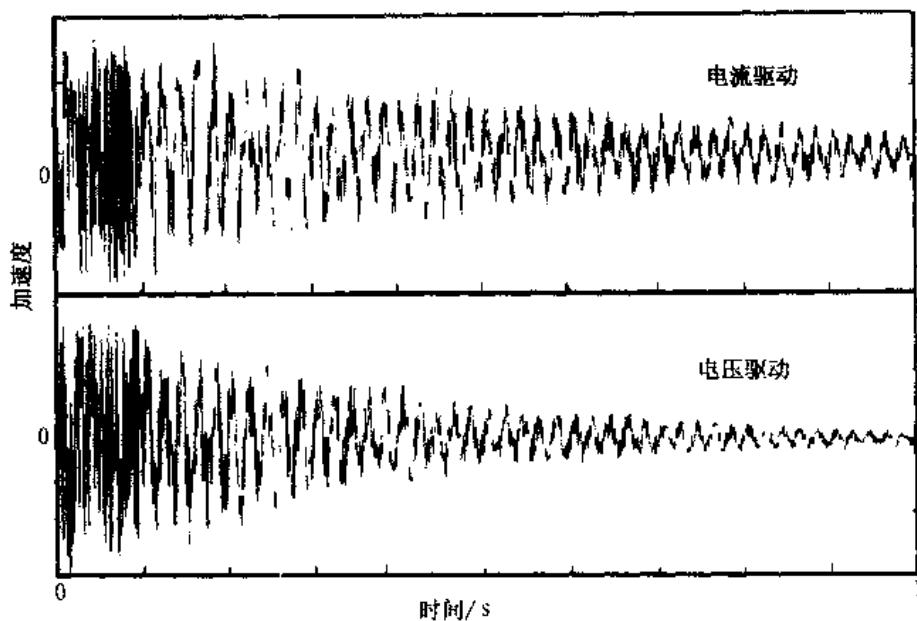


图 b.3.7 猝发随机:响应信号(电压和电流驱动激励)

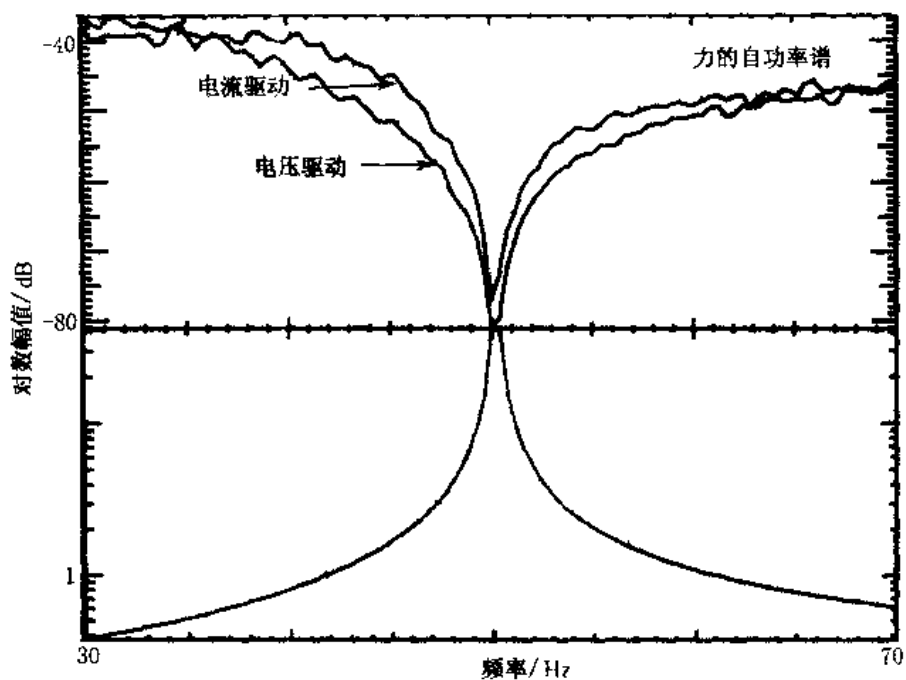


图 b.3.8 力自功率谱信号(上)和频响函数幅值谱(下)

猝发随机具有周期随机(b.3.1.3.3节)的一切优点,它可以最大限度减小泄漏误差,能给出非线性系统的最佳线性近似,而且由于两次数据采集之间(系统开始启动到重新回到静止状态)不需要等待的时间,这种信号执行激励至少可以快两三倍。猝发随机信号的信噪比和峰值有效值比都比较好,频带容易控制。当然,因为在观察窗内有一部分时间力信号是零,所以平均激励能量(或频谱有效值)小于随机情况。其主要缺点是过去需要一个专门的信号发生器,

但目前大多数测量系统都带有机内猝发随机发生器。

B.3.1.3.6 猝发快扫

猝发快扫信号与猝发随机信号相似,二者都是在观察期的后半段被削减为零,前半段构成一个快扫信号,也就是极为迅速的正弦扫描(B.3.1.3.4节)。如果信号为零的这段时间长得足以允许响应衰减到零,那么泄漏可减到最小。关于使用电流驱动激振器还是电压驱动激振器,原则上与猝发随机信号相同。因为猝发快扫基本上是一种正弦激励,故峰值有效值比和信噪比都比较好。由于各频率的幅度控制容易,所以猝发快扫信号在表征非线性系统方面有上乘表现。如果必须要进行线性化,则对于每一次平均都必须进行这种扫描。频率范围也很容易控制。缺点是需要专门的信号发生设备。

图 b.3.9 表示典型的猝发快扫信号及其频谱。

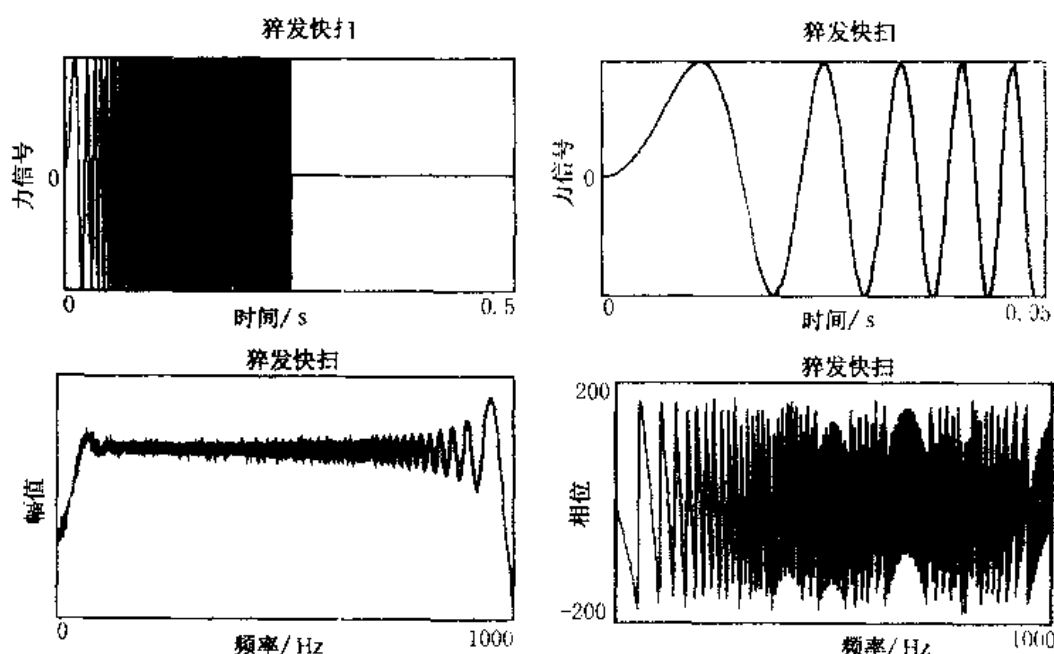


图 b.3.9 猝发快扫;时间和频率含量

B.3.1.3.7 锤 激

锤激输入信号是一种确定性暂态信号,由一个脉冲构成,此脉冲的持续时间只占采样周期的很小一部分。锤激脉冲的形状、宽度和幅值决定着力谱的频率含量。脉冲的形状和幅值决定力谱的量级,而宽度决定基带频展;最高频率与脉冲宽度成反比(参考文献 b.3.7)。图 b.3.10表示一个典型的锤激信号及其频率含量。因为不存在阻抗失配问题,所以在结构的共振频率处力谱不会出现下陷。

锤激法对于线性低噪声系统来说是一种最快的方法,并且所要求的装置、试件固定及仪器设备最为简单。这一特点使之最适合于现场测试和“快速浏览”试验。锤激法所用的力锤构造非常简单,不过是一把由力传感器和锤头组装而成的锤子。冲激脉冲的特性决定于操作者

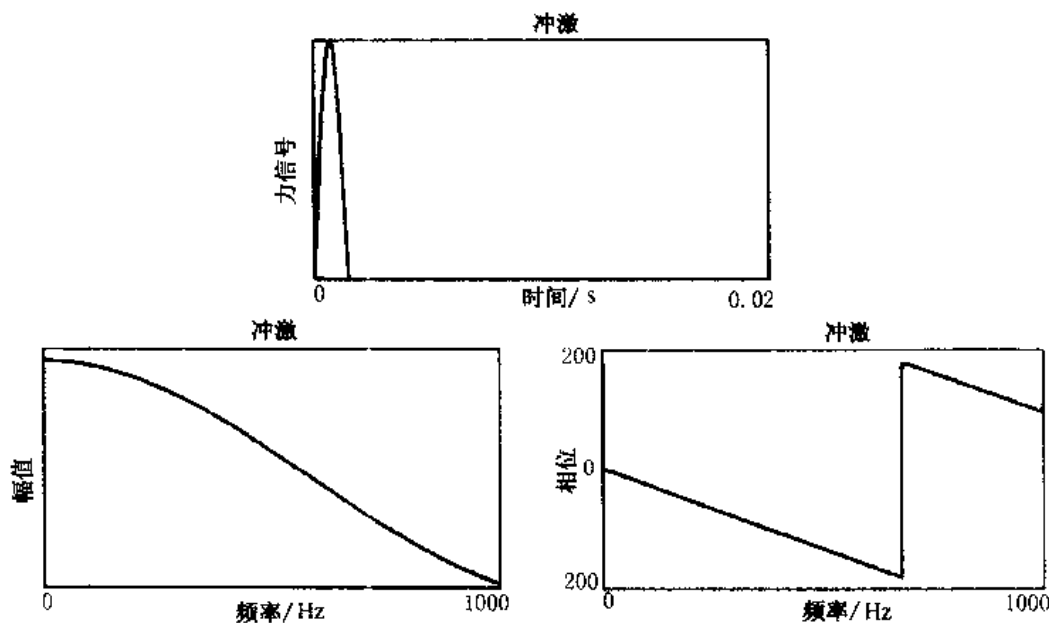


图 b.3.10 锤激:时间和频率含量

用力之大小、锤子的重量、锤头的硬度以及结构被敲击点的可塑性。锤头和敲击点表面硬,锤子重量轻,用力小,那么敲击脉冲就窄,因而基带频展也宽(B.1.1.2节)。这种激励方法不需要与试件有任何连接,所以不会出现附加质量误差。正如参考文献 b.3.6 所阐述的,这种装置在标定时要仔细一些。而且值得一提的是,锤激试验法与其他方法的不同之处在于:加速度计固定于一点作为基准点,而敲击点却是在结构上到处移动的。这与经典装置比较,激励和响应的角色正好相反。这样做的根据是 Maxwell 互易性原理(图 b.3.11)。

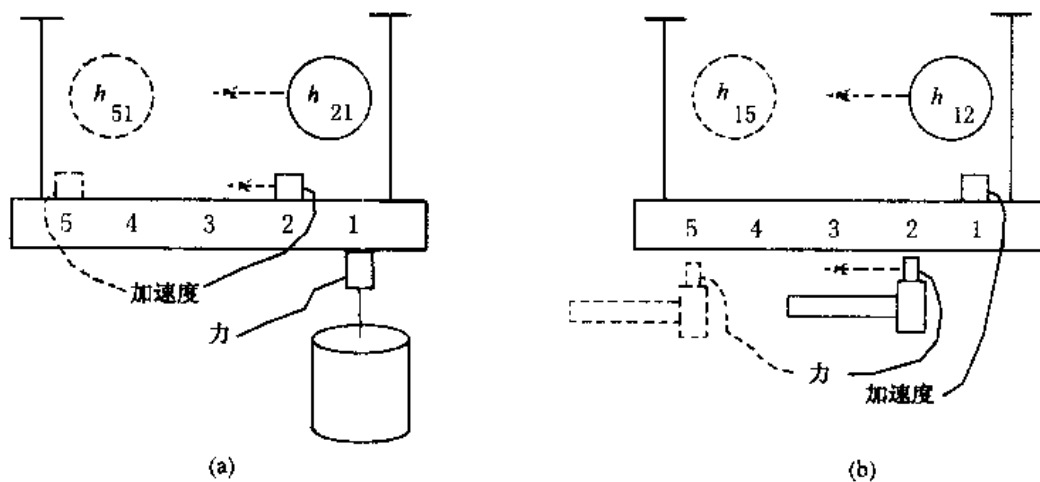


图 b.3.11 激振器固定装置(a)和锤激激励装置(b)

尽管锤激装置简单、快速、泄漏可以降到最小,但锤激试验法也显现出某些重大缺陷。首先,为获得正确结果,需要经验。敲击要有规律,每次敲击量级要相当,不要连击(连击会使力谱中出现“洞眼”,见附录 AA.2.1)等,这些都不是轻易能做到的,要求操作者技术熟练。再

者,锤激信号的峰值有效值比很差,因而对通道过载和结构的非线性(如间隙、连接点处的非线性阻尼、与加载有关的刚度…)等问题非常敏感。由于信噪比差,所以为减低测量数据中的噪声就得采用专门的信号处理方法。输入信号应当是一个很窄的脉冲,其后跟着一长串零。分布在整个采样周期内的噪声能量可能与脉冲能量具有同样的数量级,结果使信噪比很低(图 b.3.12a)。解决这一问题的办法是应用力窗。力窗在脉冲持续期间等于加在响应上的指数窗,之后便平滑地逐渐地(例如按余弦函数)衰减到零,从而抑制采样周期的长长的尾段中的噪声(图 b.3.12b)。如果系统阻尼大,但采样周期长,那么响应信号也存在类似的问题,解决办法则是给响应乘一指数窗; $e^{-\alpha t}$ (图 b.3.12b)。对于小阻尼结构,加指数窗会有助于响应在采样窗内更快地衰减(图 b.3.12a),减小泄漏误差。加窗相当于增加了系统的视在阻尼量,但增加量可由已知因子 α 确定(A.2.4.3 节,参考文献 b.3.7)。加指数窗会抹掉一些小峰,这在某些情况下可能会使密集模态的解耦发生困难。

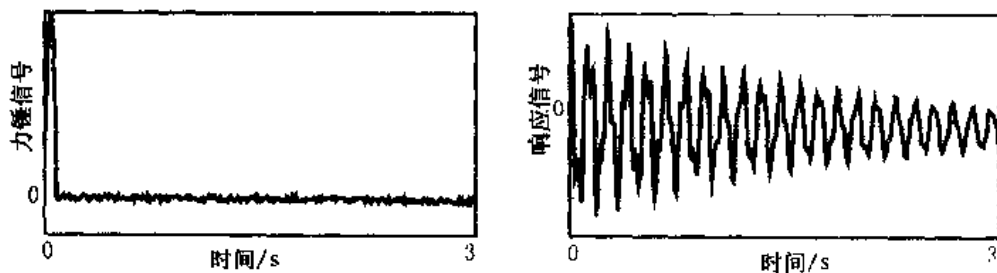


图 b.3.12a 典型的锤激脉冲和锤激响应

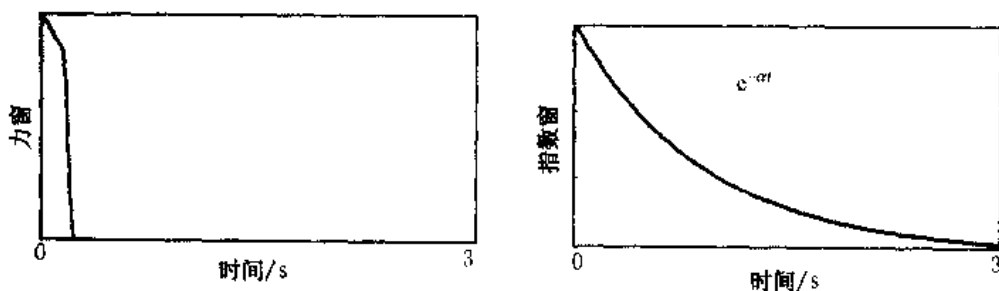


图 b.3.12b 力窗和指数窗

另一种典型的暂态激励信号是预荷—释放激励信号。结构被预先加上静载荷(例如用一条线拉住一塔状结构),然后突然释放(将线切断),这样就得到一个阶跃状的输入力。

B.3.1.3.8 扫描正弦

在准稳态正弦扫描过程中,是用频率缓慢而连续变化的正弦信号激励结构的。频率变化率小,就可以认为实际的测量数据具有稳态响应的特性。按此方法,如果响应出现最大幅值而相移急剧变化,就表明是振动模态频率(参考文献 b.3.8)。这种激励方法的历史最为悠久,依然主要适用于模拟试验技术(如窄带滤波器)。模拟试验方法中,结构被正弦激励,每一次测量都在某一个实际频率上进行。这样得到的信号具有最好的峰值有效值比和信噪比。然而,因为要求频率移动速率必须足够慢,故此这种方法极其费时。由于信号控制的高度有效性(频

率,振幅),扫描正弦特别适合于表征结构的非线性。这也就是说,非线性系统对于扫描正弦激励的频率响应是失真的,根据这失真的频率响应来拟合一线性模态模型以便提取模态参数,那是很困难的。

B.3.1.3.9 步进正弦

步进正弦是扫描正弦技术的“现代”模式,它最大限度地应用了近二十年来数字信号处理技术的研究成果。步进正弦是由分段变化的频率而不是由连续变化的频率构成的。步进正弦基本上采用下面的五步法:(1)设定下一个激励频率(例如 50 Hz);(2)数字计算机根据事先预定的每个波的点数(例如 32 个点),按设定的那个频率产生一个正弦波,并通过数-模转换器(DAC)发送出去;(3)将模-数转换器(ADC)的采样速率设置为激励频率乘以每个正弦波的点数(例如 $50 \times 32 = 1600$ Hz);(4)达到稳定状态后,对所有通道进行采样;(5)对采样数据进行处理,并作为该激励频率下的一个数字数据点予以存储。而后就下一个频率点重复步骤(1)至(5)。

与扫描正弦激励相比,步进正弦具有同样好的信噪比,峰值有效值比以及同样的非线性检测特性。然而这种数字处理方式却允许改变频率间隔、凝缩数据、减少试验时间,并能更好地处理迭混和泄漏问题(参考文献 b.3.9)。尽管如此,由于还需要频率扫描,需要等待暂态信号衰减,所以这种方法仍然是相当慢的。利用多通道数据采集可以克服上述问题(见参考文献 b.3.3 和 b.3.10)。需要明确的是,步进正弦激励要求专门的硬件和软件。

B.3.1.4 小结

B.3.1 节讨论了九种不同的激励信号,基本上分成两大类:宽带激励与单频激励。评价这些激励信号所依据的若干准则是:所要求的设备,总的测量持续时间,随机噪声及系统噪声抑制能力,对非线性结构动特性的反应或敏感性,信号本身的可控性,等等。这九种信号都给予了简短说明,并根据前述准则予以评判。当前应用最为广泛的激励信号是猝发随机信号和锤激信号。特殊情况下可能需要其他激励如步进正弦激励等。

B.3.2 激励信号与 FRF 测量

B.3.2.0 引言

从前面对各种激励信号的讨论可以明确,激励信号的选择是影响频响函数(FRF)测量质量的因素之一。适当选择激励信号可以使泄漏和外部噪声所引起的误差减至最小,并有助于处理结构的非线性动态行为。下面几段将借助一些试验实例就激励信号的选择对频响函数测量之影响给出图解说明。H. Van der Auweraer 在参考文献 b.3.3 中对这些试验实例进行了更详尽的讨论。

除激励信号的选择之外,同时激励的输入通道数对测量质量也有影响。多通道输入使总能量在整个结构上分布得更为均匀,由此可得到更一致的多输入测量数据。与单输入情况比较,在多输入情况下对力信号的惟一的额外限制条件是,同时输入的各个力信号之间互不相关。恰当选择各激励点的位置可以使测量结果得到更大程度的改善(参考文献 b.3.11)。

B.3.2.1 “线性”试验例

在此试验例中,我们假定试件呈近似的线性动态特性,并将指出轻微的非线性对结果有何影响。

通过这个例子,我们将比较 H_1 , H_2 和 H_v 等计算频响函数的各种不同方法。估计频响函数是一种最小二乘近似过程。 H_2 估计法可使外来噪声对输出的影响减到最小, H_2 估计法可以使外来噪声对输入的影响减到最小,而 H_v 估计法以一种平衡方式将外来噪声对输入和输出的影响都减到最小程度。 H_v 估计法给出的是整个频带内的最好估计,但要求的计算量比较大。在共振频率附近 H_2 近似等于最佳 H_v ,在反共振频率附近, H_1 近似等于最佳 H_v 。如果在共振频率处存在泄漏问题,那么 H_2 或 H_v 给出的估计都比 H_1 好。A.2.6.4 节对 H_1 , H_2 和 H_v 有更详尽的讨论。

我们选汽车车体作为被测结构,图 b.3.13 标出了汽车底盘上的测点。八次不同的试验结果的典型样本示于图 b.3.14 至图 b.3.21 中,有关数值列于表 b.3.2。

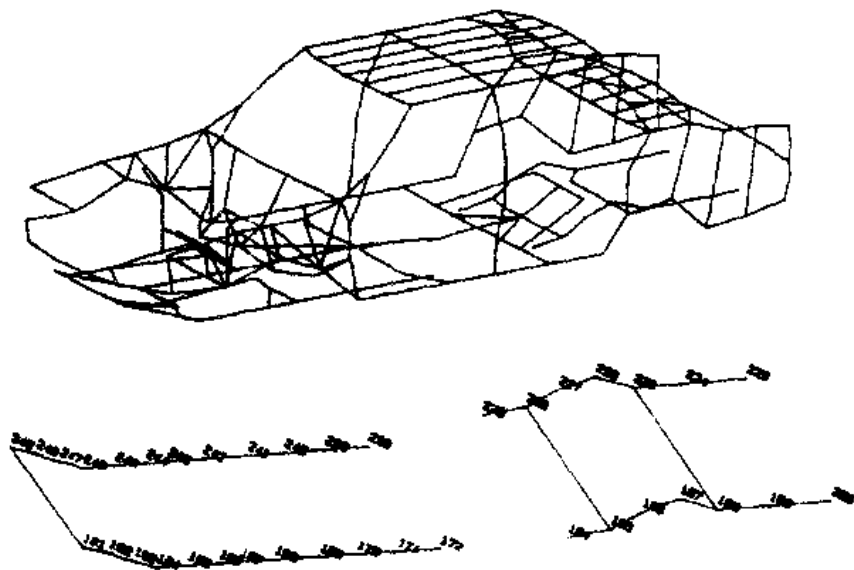


图 b.3.13 汽车底盘上的测量点

表 b.3.2 主共振峰值估计与阻尼比估计

试 例	主 共 振 幅 值 ($\text{m}/(\text{s}^2 \cdot \text{N})$)		主峰阻尼比/%	
	H_1 估计	H_2 估计	H_1 估计	H_2 估计
1	0.103	0.113	0.597	0.593
2	0.108	0.129	0.593	0.551
3	0.116	0.117	0.533	0.531
4	0.117	0.119	0.530	0.526
5	0.115	0.115	0.529	0.523
6	0.118	0.118	0.532	0.531
7	0.121	0.121	0.598	0.598
8	0.123	0.123	0.592	0.592

试例 1: 纯随机(不加窗), 图 b.3.14。

试例 2: 纯随机(加汉宁窗), 图 b.3.15。

试例 3: 周期随机(延迟 4 个周期再测), 图 b.3.16。

试例 4: 猝发随机(50% 猝发持续期), 图 b.3.17。

试例 5: 周期快扫: 图 b.3.18。

试例 6: 猝发(或暂态)快扫(50% 快扫持续期), 图 b.3.19。

试例 7: 频率步长恒定的步进正弦, 图 b.3.20。

试例 8: 频率步长可变的步进正弦, 图 b.3.21。

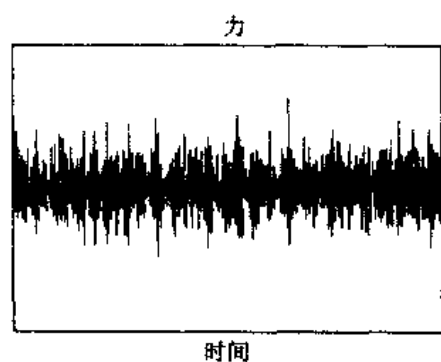


图 b.3.14a 力信号, 纯随机, 无窗

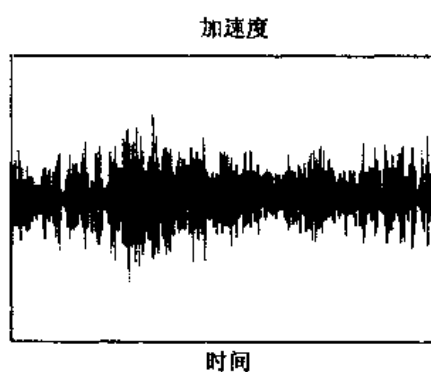


图 b.3.14b 加速度信号, 纯随机, 无窗

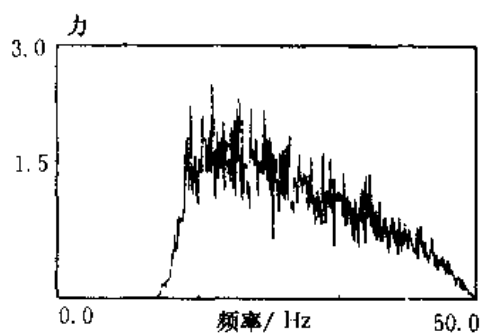


图 b.3.14c 力谱, 纯随机, 无窗

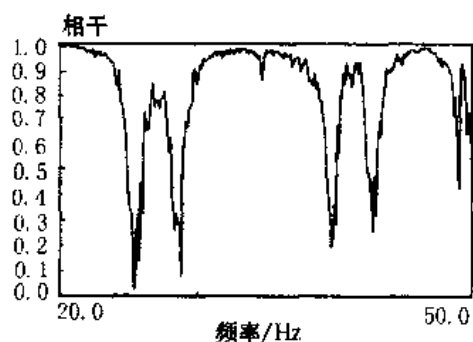


图 b.3.14d 相干函数, 纯随机, 无窗

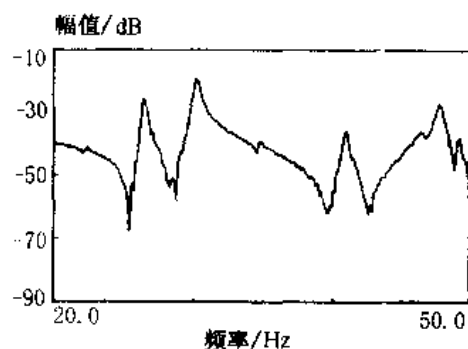


图 b.3.14e FRF 幅值, 纯随机, 无窗

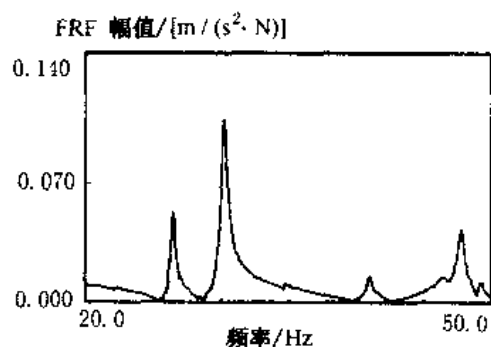


图 b.3.14f FRF 幅值, 纯随机, 无窗

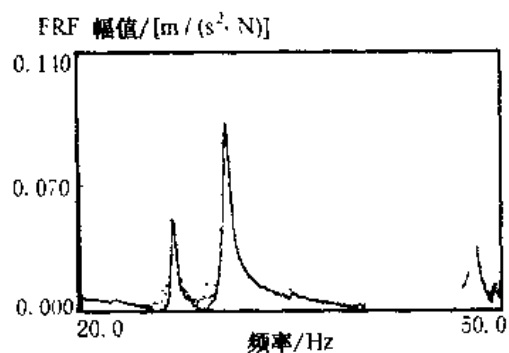


图 b.3.14g FRF 幅值($H_1 - H_2$), 纯随机, 无窗

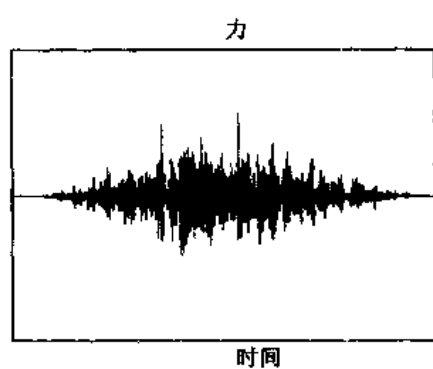


图 b.3.15a 力信号, 纯随机, 汉宁窗

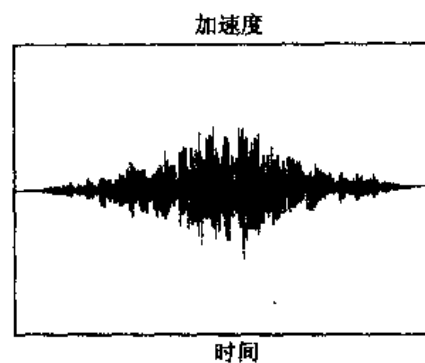


图 b.3.15b 加速度信号, 纯随机, 汉宁窗

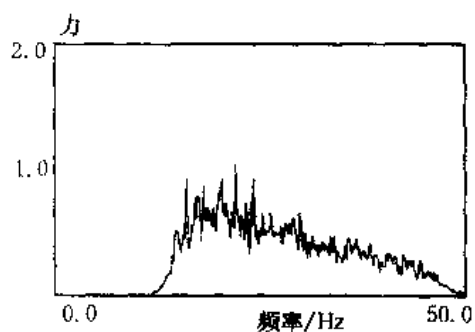


图 b.3.15c 力谱, 纯随机, 汉宁窗

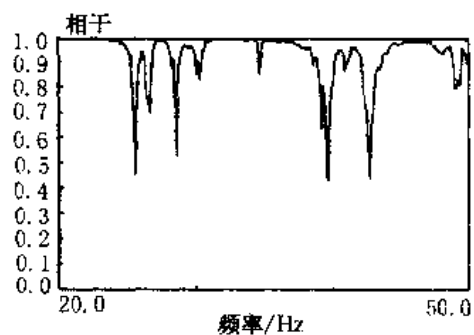


图 b.3.15d 相干函数, 纯随机, 汉宁窗

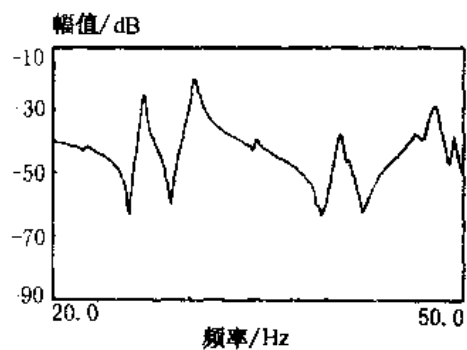


图 b.3.15e FRF 幅值, 纯随机, 汉宁窗

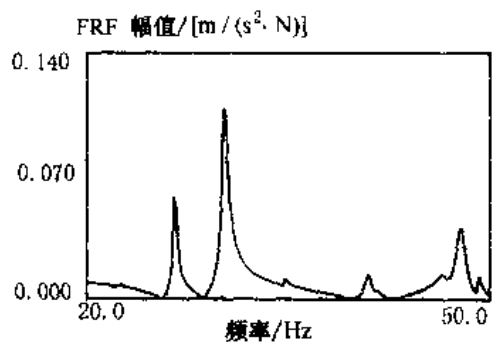


图 b.3.15f FRF 幅值, 纯随机, 汉宁窗

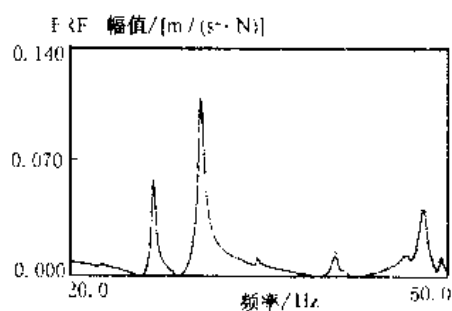


图 b.3.15 g FRF 幅值($H_1 - H_2$), 纯随机, 汉宁窗

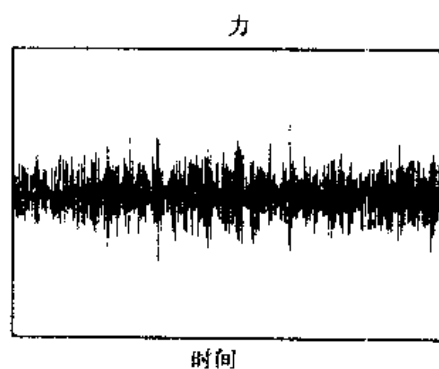


图 b.3.16a 力信号, 周期随机

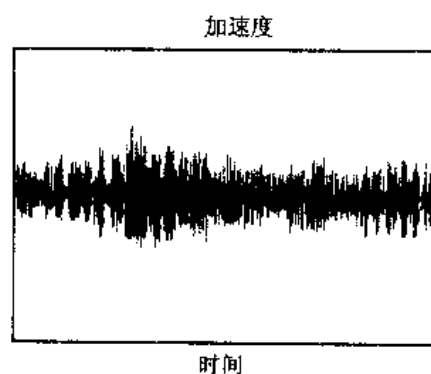


图 b.3.16b 加速度信号, 周期随机

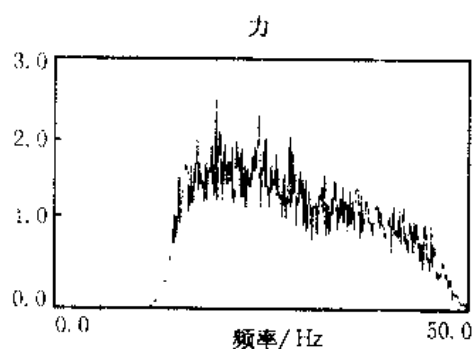


图 b.3.16c 力谱, 周期随机

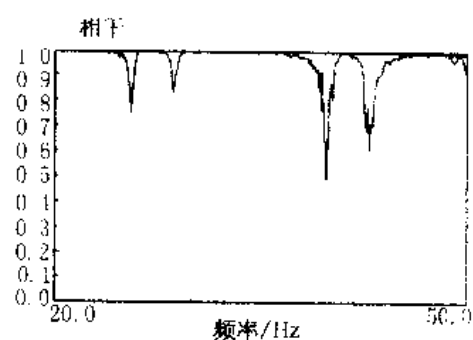


图 b.3.16d 相干函数, 周期随机

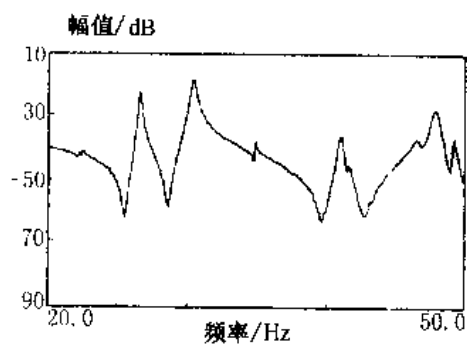


图 b.3.16e FRF 幅值, 周期随机

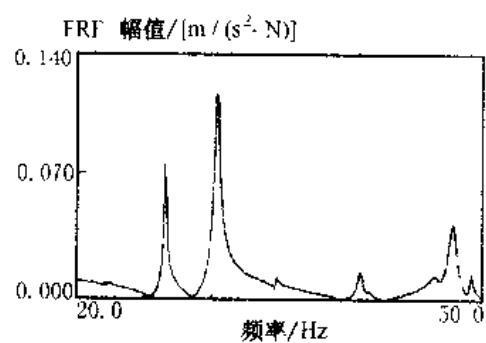


图 b.3.16f FRF 幅值, 周期随机

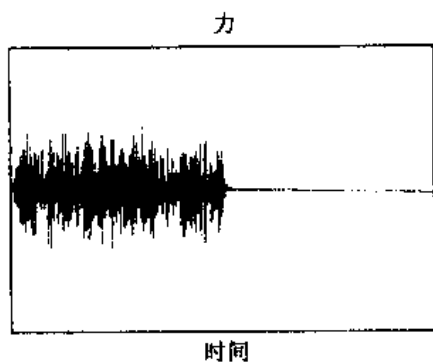


图 b.3.17a 力信号, 猝发随机(50%)

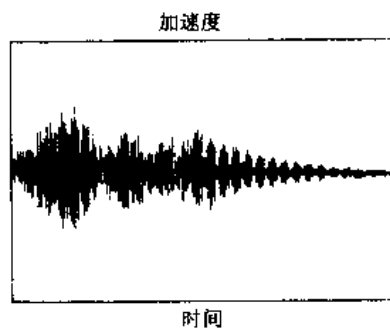


图 b.3.17b 加速度信号, 猝发随机(50%)

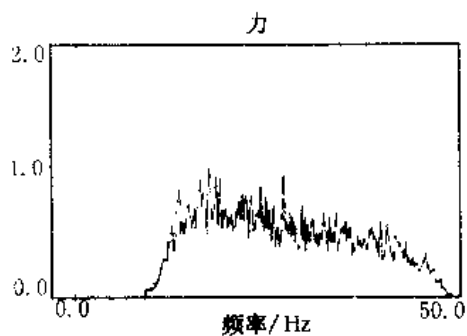


图 b.3.17c 力谱, 猝发随机(50%)

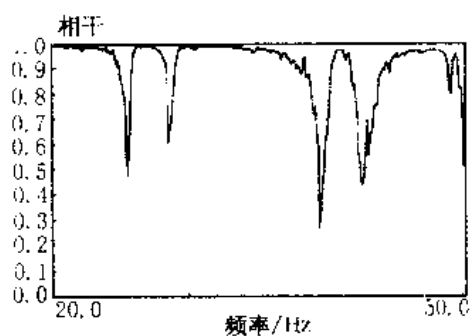


图 b.3.17d 相干函数, 猝发随机(50%)

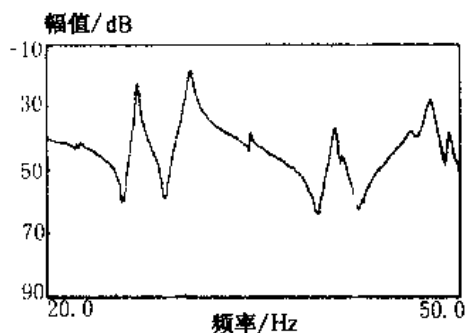


图 b.3.17e FRF 幅值, 猝发随机(50%)

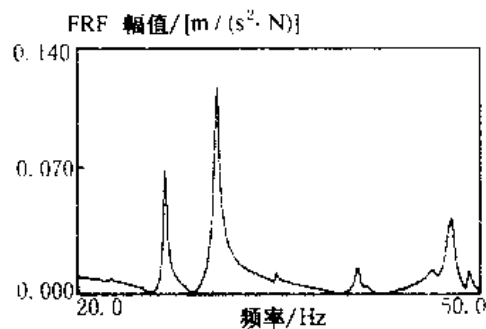


图 b.3.17f FRF 幅值, 猝发随机(50%)

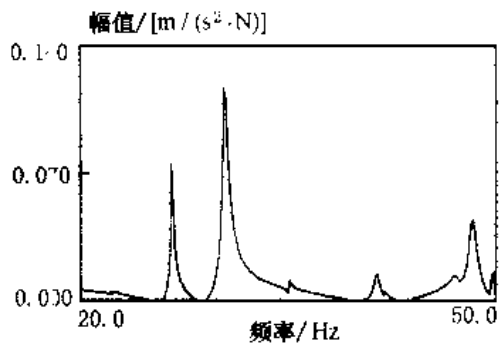


图 b.3.17g FRF 幅值($H_1 - H_2$), 猝发随机(50%)

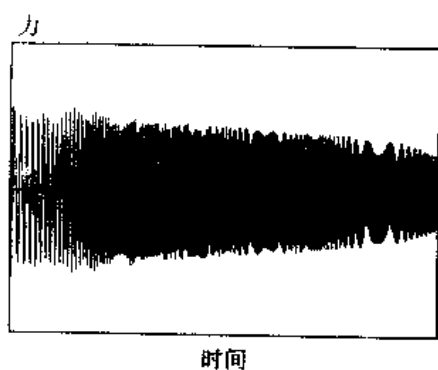


图 b.3.18a 力信号,周期快扫

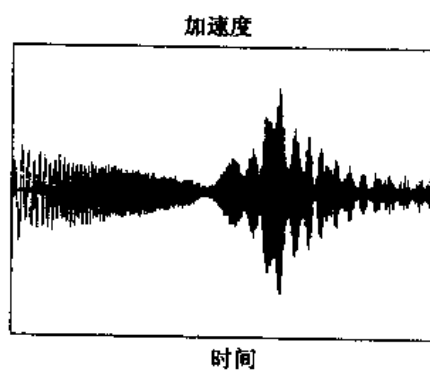


图 b.3.18b 加速度信号,周期快扫

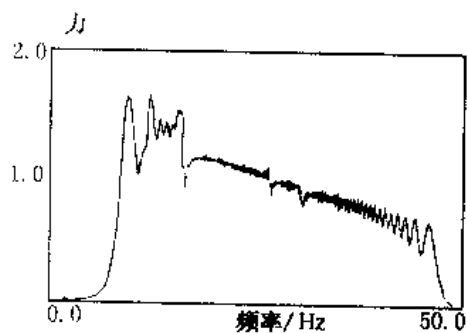


图 b.3.18c 力谱,周期快扫

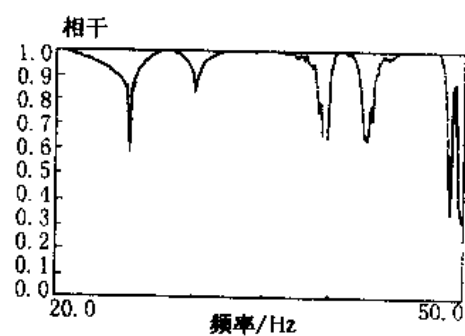


图 b.3.18d 相干函数,周期快扫

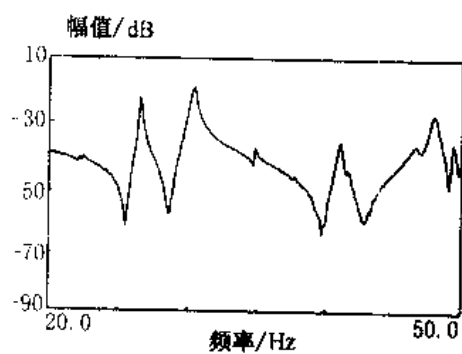


图 b.3.18e FRF 幅值,周期快扫

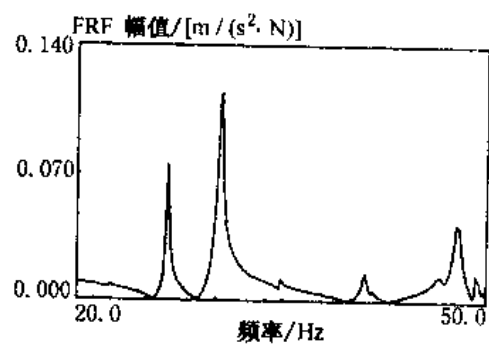


图 b.3.18f FRF 幅值,周期快扫

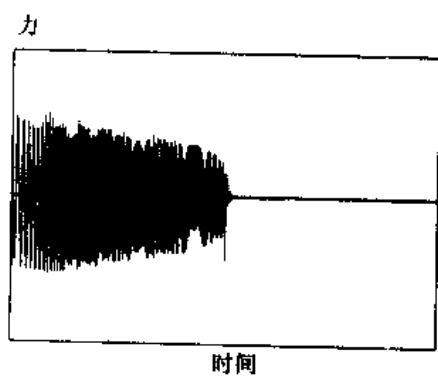


图 b.3.19a 力信号,猝发快扫

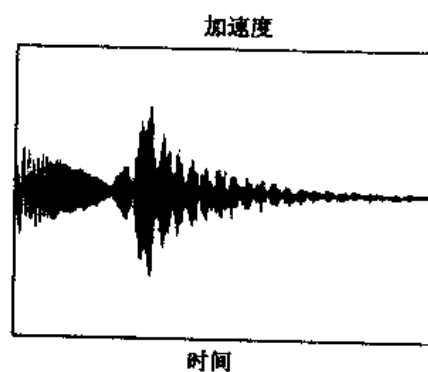


图 b.3.19b 加速度信号,猝发快扫

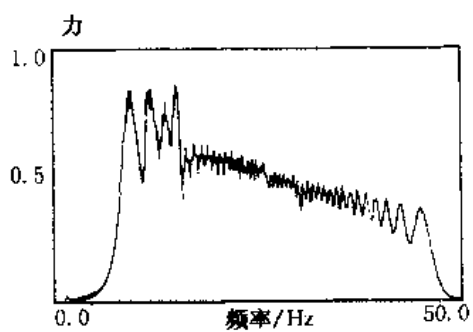


图 b.3.19c 力谱, 猝发快扫

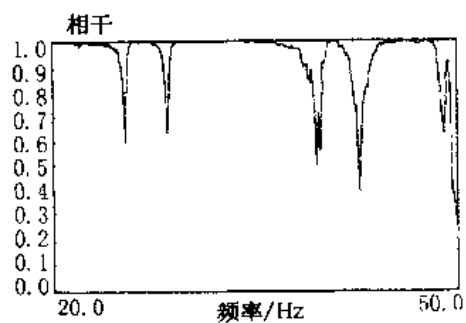


图 b.3.19d 相干函数, 猝发快扫

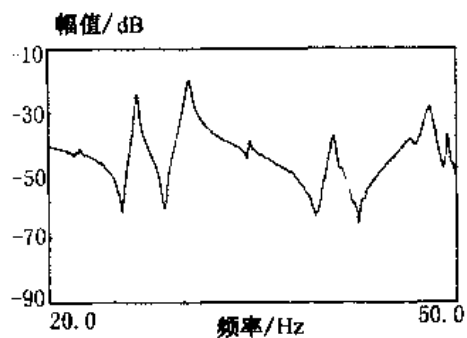


图 b.3.19e FRF 幅值, 猝发快扫

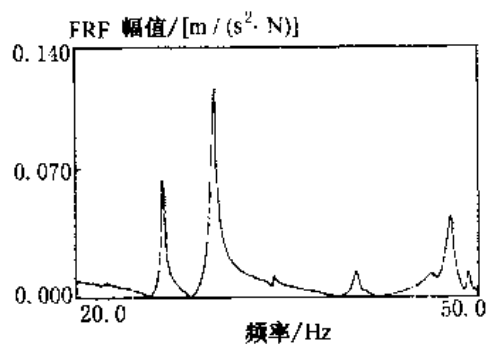


图 b.3.19f FRF 幅值, 猝发快扫

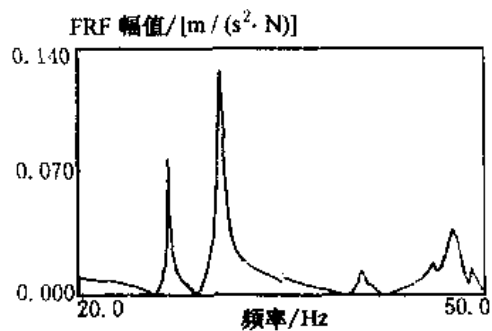


图 b.3.20a 频率间隔, 步进正弦, 固定步长

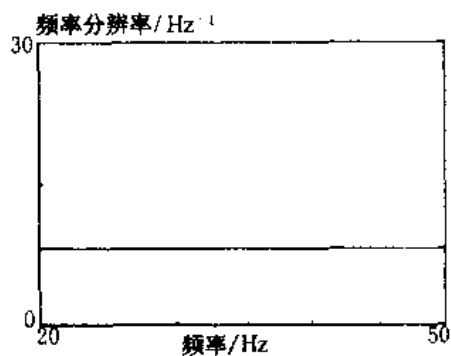


图 b.3.20b 频率分辨率, 步进正弦, 固定步长

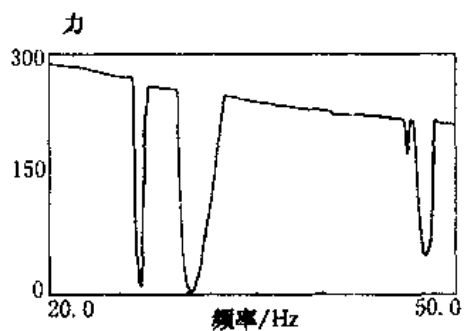


图 b.3.20c 力谱, 步进正弦, 固定步长

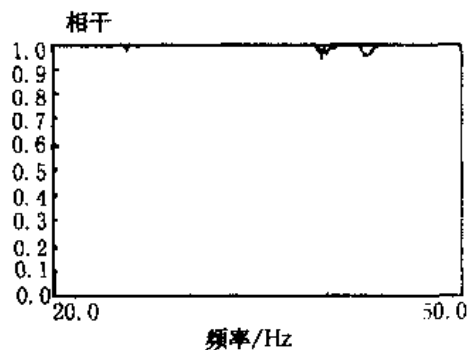


图 b.3.20d 相干函数, 步进正弦, 固定步长

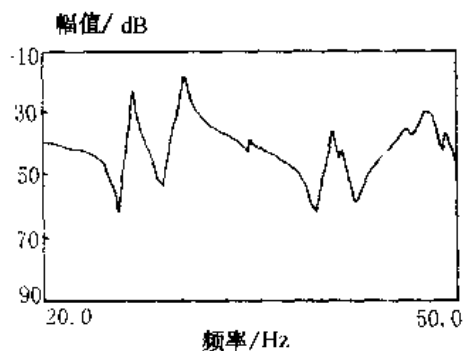


图 b.3.20e FRF 幅值, 步进正弦, 固定步长

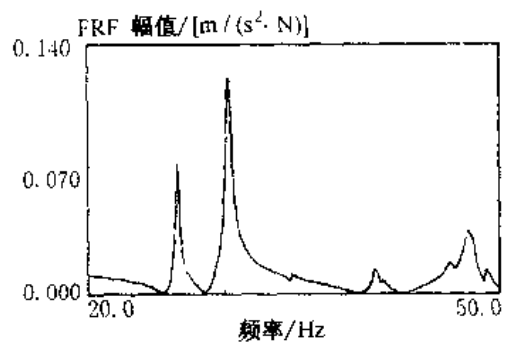


图 b.3.20f FRF 幅值, 步进正弦, 固定步长

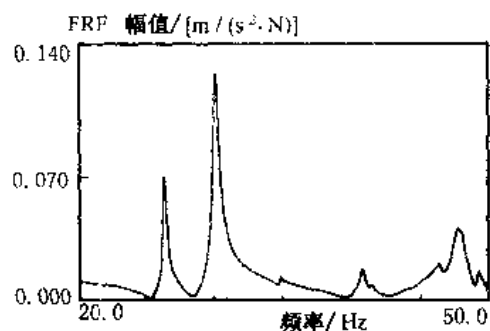


图 b.3.20g FRF 幅值 ($H_1 - H_2$), 步进正弦, 固定步长

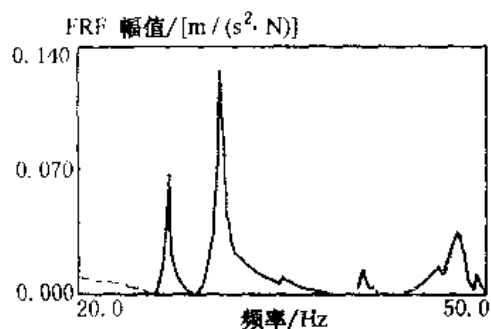
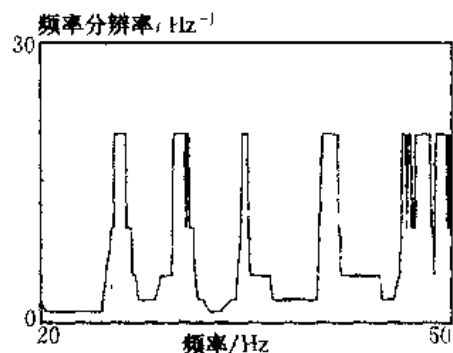


图 b.3.21a 频率间隔, 步进正弦, 可调步长



b.3.21b 频率分辨率, 步进正弦, 可调步长

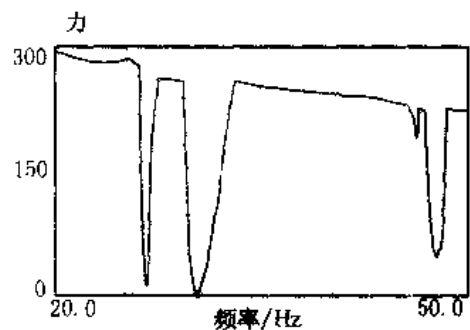


图 b.3.21c 力谱, 步进正弦, 可调步长

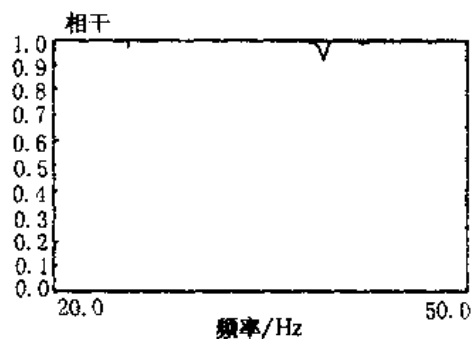


图 b.3.21d 相干函数, 步进正弦, 可调步长

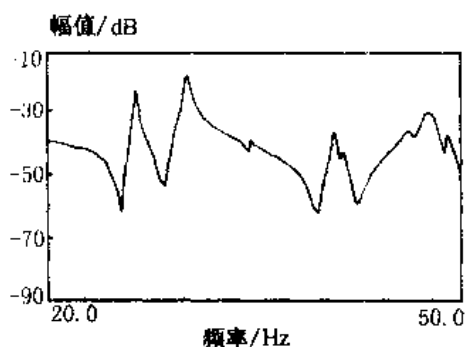


图 b.3.21e FRF 幅值, 步进正弦, 可调步长

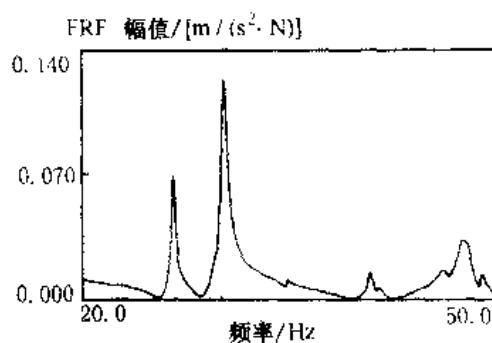


图 b.3.21f FRF 幅值, 步进正弦, 可调步长

从这些试验可以得到如下主要结论:

(1) 用纯随机激励时(图 b.3.14), 存在严重泄漏误差, 其表现为: 与试例 3 和试例 5 的无泄漏情况相比, 共振频率处的相干值低(图 b.3.14d), 共振峰值较小, 阻尼比较大(表 b.3.2), H_1 和 H_2 两种估计之间存在差别(图 b.3.14g, 表 b.3.2)。

(2) 采用汉宁窗可减少泄漏, 证据是: 共振处的相干得到了改善(图 b.3.15d), 估计出来的频响函数较少噪声(图 b.3.15e), 共振峰值的估计较好(表 b.3.2)。

(3) 试例 3 到试例 6(周期随机, 猝发随机, 周期快扫, 猝发快扫)所得结果相当吻合。共振频率处的相干函数值高(图 b.3.16d, b.3.17d, b.3.18d, b.3.19d), H_1 和 H_2 两种估计之间的一致性较好, 这些都表明泄漏误差不大。猝发信号与其对应周期信号相比, 正如从它们的力谱(图 b.3.16c, b.3.17c, b.3.18c, b.3.19c)可以推知的一样, 总激励能量比较低, 从而导致信噪比降低, 这一点从反共振频率处(在反共振频率点信号很小)的相干函数值比较小便可看出。值得注意的是, 周期随机信号的测量时间是猝发随机信号的 4 倍还要多。

(4) 与宽带信号比较, 步进正弦激励信号的特点是大大改善了信噪比, 表现为频响函数很光滑(图 b.3.20e, b.3.21e), 相干函数值即使在反共振频率点也比较大(图 b.3.20d, b.3.21d)。

(5) 步进正弦激励法完全没有泄漏, 共振频率点的高相干函数值(=1!)以及 H_1 和 H_2 估计法之间的一致性(表 b.3.2, 图 b.3.20g)可资证明。

(6) 步进正弦试验法中的可变频率步长技术实现了根本性的数据凝缩。它不但减少了数据点数(此试例中数据点是 179 个而不是 250 个), 而且提高了共振频率附近的频率分辨率(从 0.12 Hz 提高到 0.05 Hz)(图 b.3.20a, b.3.21a, b.3.20b 及图 b.3.21b)。分辨率的提高也说明了为什么频响函数在共振频率点有较高的峰值(表 b.3.2)。为了从频率点间隔不等的频响函数数据块导出模态参数, 一些专门的频域模态参数识别方法已研制成功(A.3 章)。

(7) 步进正弦试例的阻尼比高于无泄漏带宽试例大约 10%(表 b.3.2)。这并非泄漏所致, 极有可能是结构非线性引起的, 因为在步进正弦试验中总激励量级高, 非线性会被更强烈地激励出来。

B.3.2.2 非线性动态特性

模态分析的基本假定之一是我们所研究的系统的动态特性是线性的。根据叠加原理,系统之线性可用输入-输出关系表示:假如 x_1 和 x_2 是系统的输入,它们各自对应的输出是 y_1 和 y_2 ,那么组合输入 $Ax_1 + Bx_2$ 对应的输出就是 $Ay_1 + By_2$,这里的 A 和 B 为任意值。进行模态试验时,为保证结果的正确性,一定要验证这一假定是否满足(B.2.3.1节)。

在不同量级的力输入条件下测量频响函数,可以在某种程度上检查出非线性。如果结构是线性的,则频响函数与输入力的大小无关。图 b.3.22 表示对一个冲击阻尼器进行检查的结果,结果清楚显示出非线性动态特性。

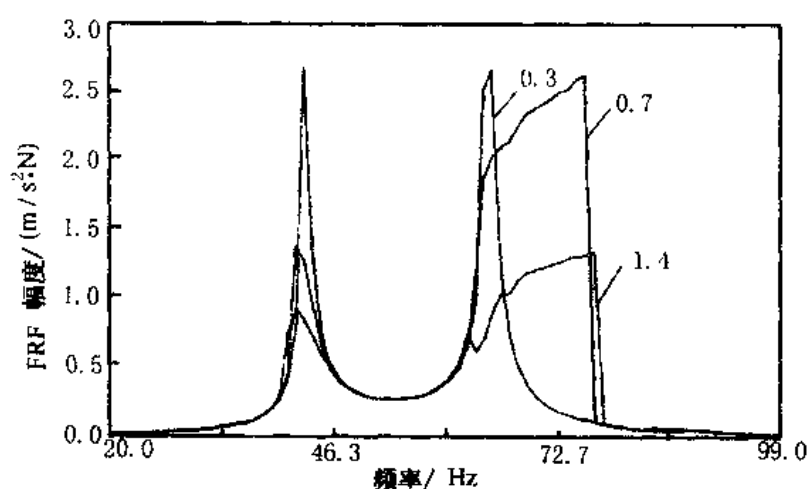


图 b.3.22 冲击阻尼器:不同大小输入力下的频响函数(FRF)

为了通过辨别与定量分析的途径研究非线性动态特性,已经设计出若干指示函数和试验方法(参考文献 b.3.12),其中典型的有:谐波检测法(参考文献 b.3.13)。希尔伯特变换(参考文献 b.3.14)、阻尼图(参考文献 b.3.15)、复刚度法(参考文献 b.3.16)和直接时间步进法(参考文献 b.3.17)。对于其中一些方法,正弦激励信号是个必要条件,而对另一些方法,正弦激励则因其高度可控性而成为研究非线性特性的最好工具。

对频响函数进行希尔伯特变换,结果得一复值函数,可与原始频响函数相比较。图 b.3.23(参考文献 b.3.14)表示就库仑摩擦和硬化弹簧进行这类试验的典型结果。

如 B.3.1 节所述,多数宽带激励信号具有将非线性影响平均殆尽的倾向,产生近似线性的外貌,而正弦信号却能更好地保留非线性效应。图 b.3.24 和 b.3.25 清楚地表示出这一现象。这两个图都是某一非线性阻尼情况的频响函数和希尔伯特变换,图 b.3.24 用的是步进正弦信号,图 b.3.25 用的是随机激励。前者明显地指出了非线性特性,后者则把非线性影响平均掉了。

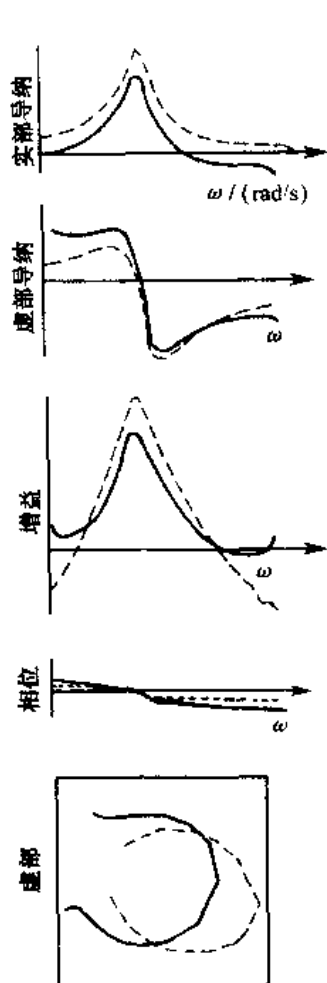


图 b.3.23a 库仑摩擦;FRF(实线)
和希尔伯特变换(虚线)

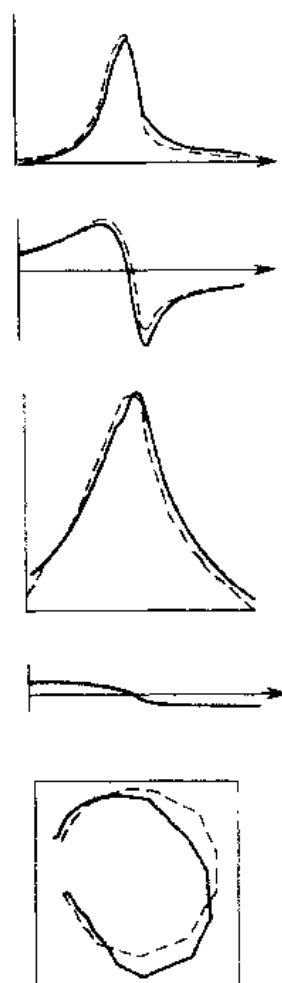


图 b.3.23b 硬化弹簧;FRF(实线)
和希尔伯特变换(虚线)

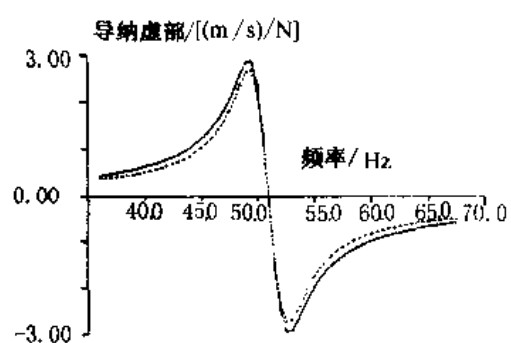
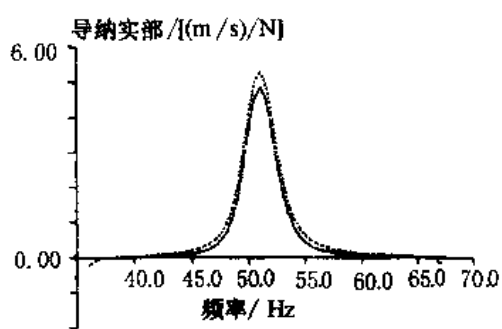


图 b.3.24 非线性阻尼;FRF(实线)和希尔伯特变换(虚线),步进正弦激励

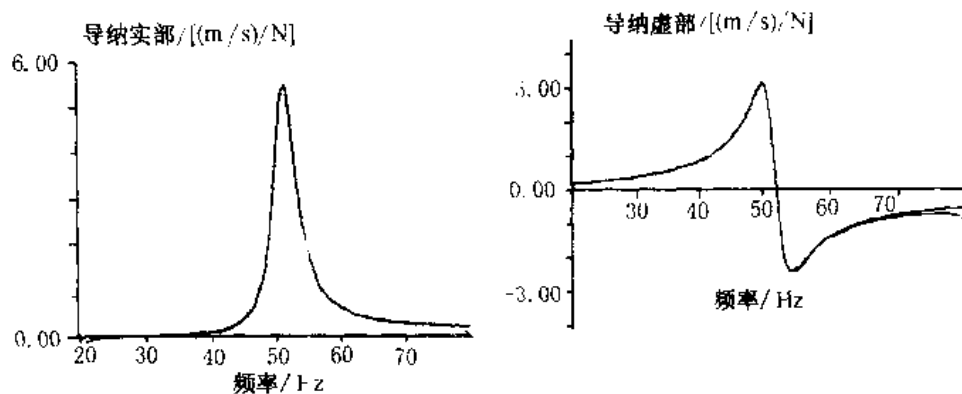


图 b.3.25 非线性阻尼;FRF(实线)和希尔伯特变换(虚线),随机激励

B.3.3 总结与结论

B.3.1 和 B.3.2 节讨论并图解了许多激励信号的主要特征,现总结成速查表 b.3.3(参考文献 b.3.3 和 b.3.5)。关于激励信号的主要结论是:适当选择激励信号会使线性特性结构的测量结果得以改善;结构存在非线性时,选择适当信号既可将非线性平均掉,也可以对它们予以描述和鉴别;对于平均模态分析试验,用得最多的激励信号是猝发随机和锤激,特殊场合也可以使用别的激励信号如步进正弦。此外,多输入激励法势头强劲,因为它可以改善输入能量在结构上的分布,使数据库更一致,提高信息时间比,提高检测耦合根或重根的能力(见 B.2.2 节)。

表 b.3.3 激励信号速查表

	宽 带 随 机							单 频	
	非周期	周 期			暂 态			扫描正弦	步进正弦
	纯随机	伪随机	周期随机	周期快扫	猝发随机	猝发快扫	冲击		
减小泄漏	--	++	++	++	+	+	+	+	++
信噪比	0	0	0	+	-	-	--	+	++
能量谱密度/Hz	0	0	0	0	-	-	--	+	++
峰值有效值比	+	+	+	++	0	+	--	++	++
对过载灵敏度	++	+	++	-	++	-	--	-	-
测量时间	+	++	0	+	++	++	++	--	--
可控性(频率)	0	++	++	++	++	++	--	++	++
可控性(幅值)	--	--	--	++	--	++	--	++	++
消除非线性失真	++	--	++	--	++	--	--	--	--
能发现非线性表征	-	-	-	+	-	+	--	++	++
特殊设备需求	+	-	-	--	-	--	++	--	--
注:++:很好 +:好 0:一般 -:差 --:很差									

B.4 章 实践中的模态参数估计

B.4.0 引言

B.1 章到 B.3 章讨论了模态分析试验所需要的设备、激励、设置、标定以及频响函数的测量等问题。下一步将利用这些测量信息来估计系统的模态参数:共振频率、阻尼系数、模态参预因子和模态振型等。A.3 章讨论了许多参数估计方法的理论背景。本章将以更加实际的观点探讨参数估计过程。

参数估计过程包含以下几步:选择合适的方法,选择要采用的测量,选择频带,选择时间块,极点数估计,极点值估计,模态向量估计等。

一旦估计出一套模态参数,分析者便可使用模型验证技术来帮助自己判断模型和(或)所选最佳模态参数的正确性。作为对 A.4 章的一个补充,B.4.2 节将讨论怎样解释诸如模态置信准则、模态参预、模态复杂性、模态相位共线性等等这些模型验证函数。

B.4.1 模态参数估计

B.4.1.0 引言

模态参数估计过程常常包含两个重要方面:估计系统极点及模态参预因子,估计模态向量。为了利用尽可能多的数据,每一个阶段分析者都可以采用各种不同的估计方法。

正确选择估计过程中要用到的测量数据、频带和时间数据块,可以使估计质量得以改善。

大部分模态参数估计方法中的主要问题是确定物理意义明确的系统极点的准确数量。频响函数的幅值求和、模态指示函数(MIF)、误差图或奇异值分解图以及稳态图等,对于确定极点数量都是很有帮助的工具。

稳态图也是在所考虑的频带内选择系统极点的根据。

第二方面(估计模态向量)是利用估计出来的系统极点和在各点测得的频响函数来确定相应的模态位移。

B.4.1.1 方法选择

A.3.2 和 A.3.6 节讨论了选择参数估计法的某些准则的理论依据。通常,较好的做法是对同样的数据采用各种不同的方法,以便从估计最为一致的模态参数中提取结果。但可供利用的设备和软件可能会限制你的选择。

单自由度估计法假定,在共振频率附近结构的特性就像一个单自由度系统。这意味着不存在其他共振频率的干扰。因此共振频率应当分得很开,不发生耦合(即阻尼较小)。如果某台傅立叶分析仪具有模态参数估计功能,那么这些功能一般都是以单自由度法为基础的,因为单度法简单而快速。由于加速度计的附加质量效应(B.2.2.3 节),各点的共振峰值稍有不同,

这种情况下单自由度法是很有用的工具。这时,单自由度法允许采用局部共振频率和阻尼以获得模态位移的有效估计。

用比较先进的分析系统时,多自由度法几乎跟单自由度法一样快速。因为这样的系统比较灵活,能够给出更准确结果,而多花不了多少时间,故应首选。在共振频率耦合紧密(或仅共振频率)的情况下,多自由度法是惟一有效的考虑。

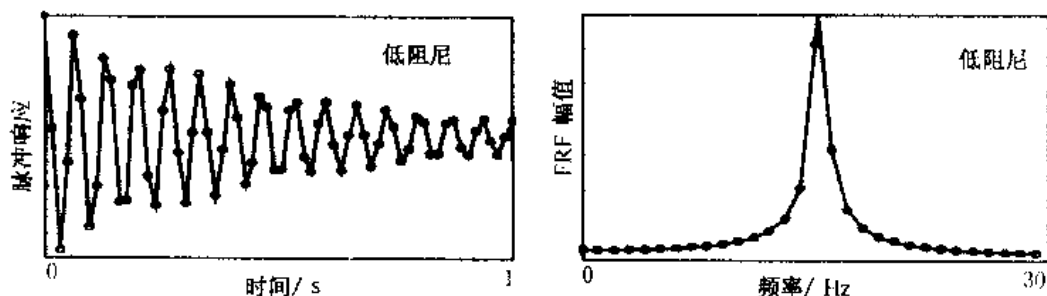


图 b.4.1a 小阻尼结构的脉冲响应函数与频响函数

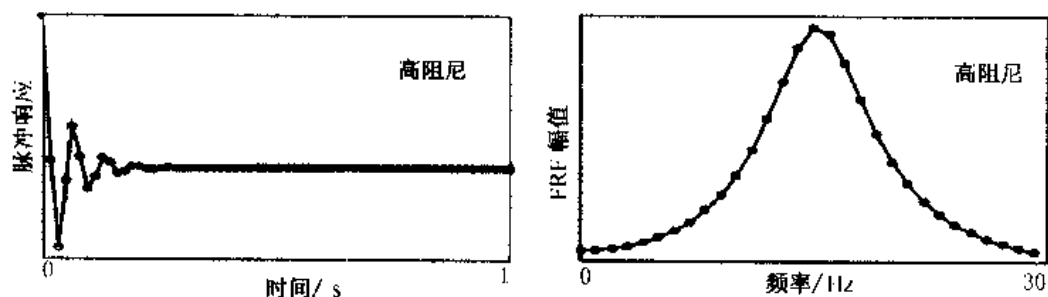


图 b.4.1b 大阻尼结构的脉冲响应函数与频响函数

另一个准则是实现域,即时域还是频域。A.3.6 节已经讨论过时域法和频域法之间的实际差别问题:时域法在数值上能更好地适调,而频域法估计中频率值按平方规律升高,因而频带不宜选得过大;另一方面,频域法能够近似带外效应(这一点在估计模态位移时很有用),时域法则不能补偿这些效应。因为小阻尼模态在频响函数中表现出很窄的峰值(此峰值只用少量几个点来确定),而对应的脉冲响应衰减时间却很长(图 b.4.1a),因此时域法可以得到更多的信息(即采样值),从而产生更准确的结果。对于大阻尼系统,情况则相反。

如果模态分析实验的目的是得到纯模态(这些模态可以重新换算成实值模态),以便例如为了验证有限元模型结果,那么分析者应当选择能够估计这类模态的方法。有些方法是近似的(如最小二乘频域法,见 A.3.5.1 节),有些方法(在理论上)则是准确的(如频域直接参数识别法,见 A.3.5.4 节)。

多自由度法常包括两个主要方面。第一方面是整体参数(系统极点和模态参预因子)估计,为此目的而广泛采用的方法是多参考点最小二乘复指数法(A.3.4.2 节)。第二方面是估计局部参数(模态位移),为此,最小二乘频域法(A.3.5.1 节)最为通行。

B.4.1.2 测量选择

估计系统极点和模态参预因子时,考虑适当选择测量方法可使结果得以改善。当处理由相互连接、相对比较松弛的几个部件构成的结构时,每个部件的共振频率可以通过研究各单独部件的测量数据而找到。显然,低劣的测量应当摒弃。如果测量的信噪比很低,例如测量响应值很小的那些点(如机床的基础、结构的笨重部分等,见图 b.4.2)时,这些测量也会降低估计的精度。然而,假如这些噪声很大的信号与其他测量信号相比很小,它们对整个估计过程的影响也就比较小。

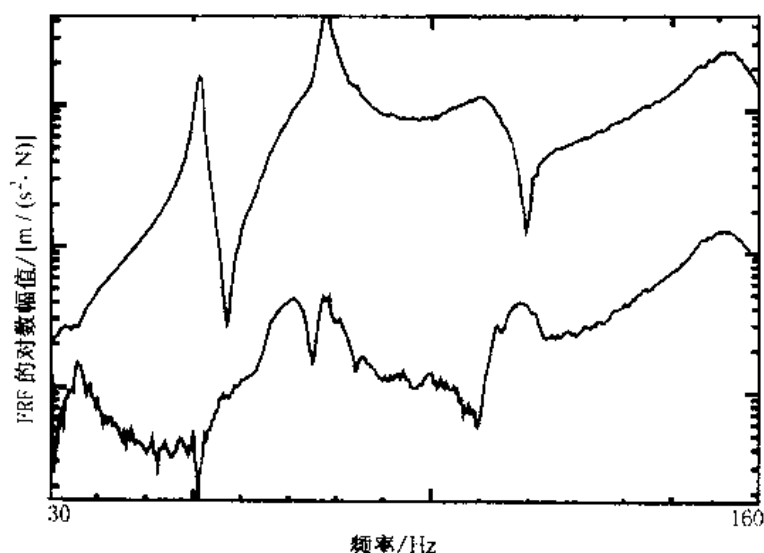


图 b.4.2 大而清晰的(有用)频响函数与小而混有噪声的(无用)频响函数

然后根据全部测量,从模态估计中得出与所选系统极点相对应的系统模态振型。

B.4.1.3 频带选择和/或时段选择

B.4.1.1 节曾提到,频带一般不应选得过宽,所选频带中不应含有太多的系统极点(例如最多 10 个)。因此,所感兴趣的整个频带可被几个邻接的较窄频带覆盖。如果估计系统极点是从频响函数开始并采用时域法(例如多参考点最小二乘复指数法),那么每一个频带将包含许多条谱线,谱线数必须等于 2 的整数次幂,这是快速傅立叶变换奇偶重排所要求的,以便将频率数据转化为时间数据(见 A.2.1.4 节)。由于现代计算机速度快、功能强,因而可以不限制频带非要是 2 的整数次幂。频响函数在所选频带的起始点及终止点的值应当很小(图 b.4.3),最好不处于共振频率两侧上升或下降沿上。这样做,带外效应的影响最小。

因为时域法常常是从脉冲响应函数开始的,所以在脉冲响应函数中恰当选择时间段将会改善估计的结果。在大阻尼情况下,脉冲响应迅速衰减,响应的后段信噪比很低,因此只应当考虑时段开始部分的数据。当脉冲响应函数是从频响函数的傅立叶反变换得来时,它时常在时段的末端有所增加,这是由于被称做求逆或时域泄漏的信号处理误差造成的(图 b.4.4)。显然,准确估计参数时这些数值无用。

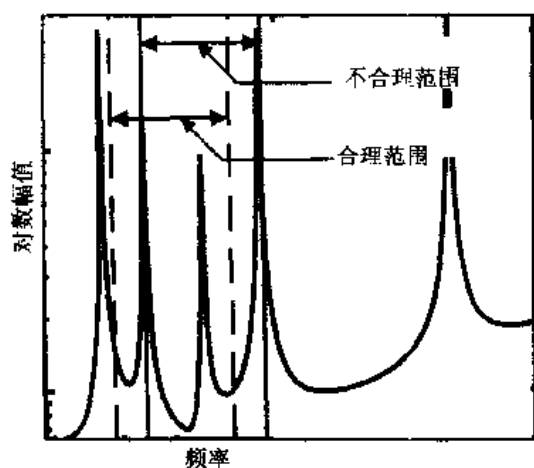


图 b.4.3 频带选择的优(虚线)和劣(实线)

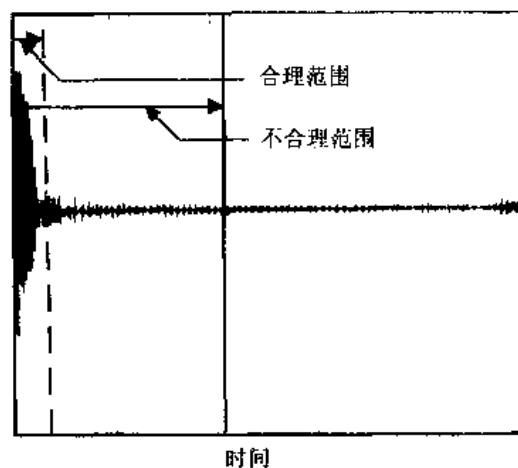


图 b.4.4 阻尼系统的典型脉冲响应
(频响函数的快速傅立叶反变换)

B.4.1.4 极点数

几乎所有模态参数估计方法都面临一个问题,就是物理意义明确的系统极点的准确数目如何确定。下面几段讨论几种有助于分析员确定极点数的方法:

B.4.1.4.1 频响函数之和

估计系统极点数的首要且显而易见的方法是按频响函数的幅值数出峰值的数目,将全部实际测得的频响函数按幅值求和,就把峰值信息整个地集中在一条曲线上(图 b.4.5)。和函数计算如下:

$$(b.4.1) \quad H_{sum} = \sum_i \sum_j |\operatorname{Re}(H_{ij})| + j \sum_i \sum_j |\operatorname{Im}(H_{ij})|$$

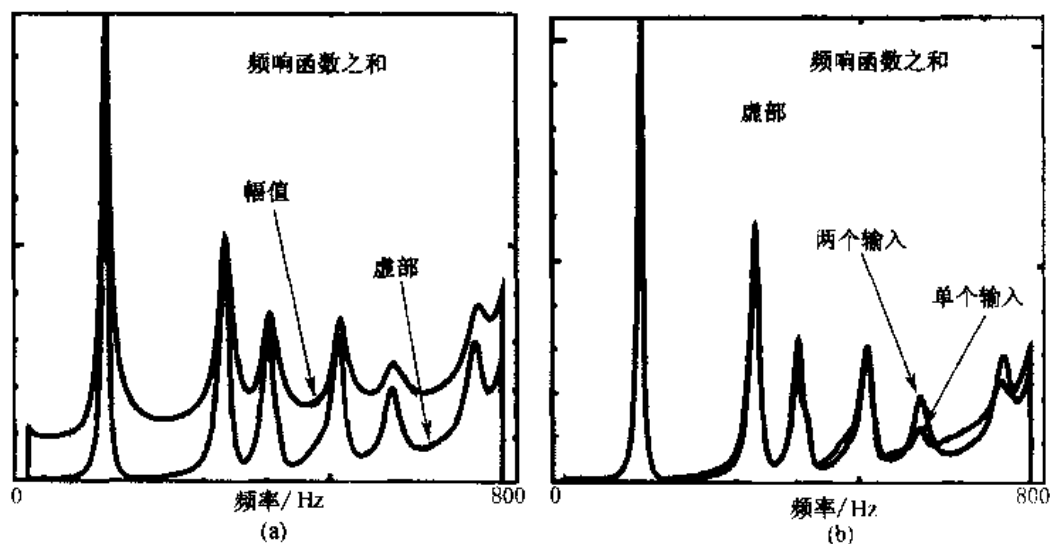


图 b.4.5 频响函数的和
(a) 幅值和虚部; (b) 一个输入或两个输入

曲线上那些最高峰值表示总的模态位移最大的共振点,矮的峰值指明了位移较小的模态或是局部模态(即仅仅是部分自由度的位移)。因为对于纯模态系统,频响函数的虚部在共振频率处峰值突起,所以加速度对力的频响函数的虚部绝对值求和也能给出类似的尖峰信息(图 b.4.5a)。“小”模态淹没在“大”模态的影响之下是完全可能的,这样多个根将只作为单个峰值出现,因此峰值数将总是少于实际存在的极点数。如果输入不止一个,则所得数据可显示出更多的峰值,这表明假如只用一个输入,有些模态就难以很好激励出来(图 b.4.5b)。

B.4.1.4.2 模态指示函数

模态指示函数(MIF)是个频域函数,它展示的是在纯模态共振频率处的局部最小值(参考文献 b.4.1, b.4.2)。对于给定的一组数据,模态指示函数最多等于激励点的数目。一阶模态指示函数表示所有共振频率处的局部最小值。理论上,二阶模态指示函数(如果有的话)将只是在二重根处才有局部最小值,三阶模态指示函数只在三重根处有最小值,如此等等。

模态指示函数所依据的事实是:纯模态情况下,在共振频率处结构的谐波响应滞后激励力 90° 。A.6.2.4 节详细定义并说明了有关模态指示函数的几个公式。

作为频率函数的一阶模态指示函数的图像,在由当前一组激励点激发出的纯模态频率上急剧降低。如果有重根存在,那么二阶模态指示函数曲线在重根频率处会出现类似的急剧下降的。图 b.4.6 表示具有二重根(频率大约 145 Hz)的一个结构的典型的一、二模态指示函数。

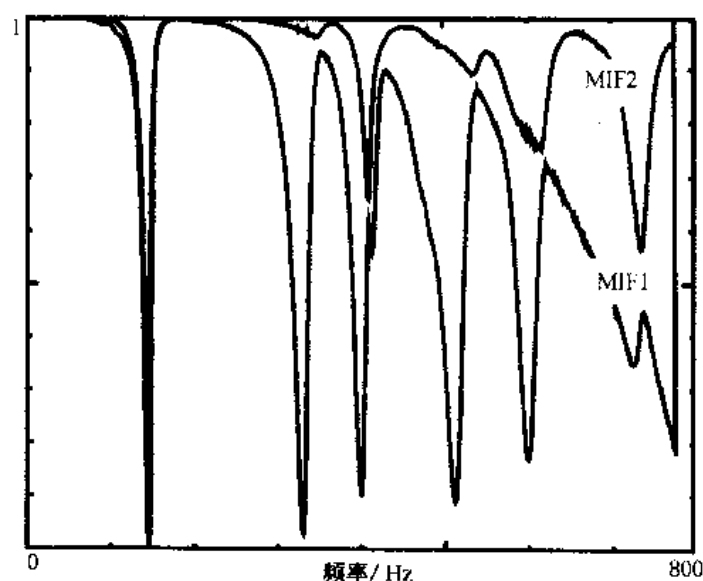


图 b.4.6 具有二重根的系统的一、二阶模态指示函数

在复模态和/或耦合(交越)模态情况或密集模态情况中,模态指示函数的解释比较困难。

B.4.1.4.3 误差图或奇异值图

根据估计模态参数时所用的多参考点最小二乘复指数法的基本方程(A.3.4.2 节)求解系数矩阵时,规格化的最小二乘误差与系统中假定的模态数有关,表达此关系的曲线就叫误差图。在数据不混有噪声的情况下,如果达到了准确的模态数,最小二乘误差便降到零。在实践上,根据

信噪比的大小,最小二乘误差或多或少都会下降。我们通过下面的推导来说明这一点。

A.3.4.2 节已经解释过,为了求得矩阵系数 $[W]_1, [W]_2, \dots, [W]_N$ 的最小二乘估计,必须解下述方程(方程式中 $h(n\Delta t)$ 表示在时刻 $n\Delta t$ 的脉冲响应值):

(b.4.2) $\langle h(n\Delta t) \rangle_o [Y_1] + \langle h((n-1)\Delta t) \rangle_o [W]_1 + \dots + \langle h((n-p)\Delta t) \rangle_o [W]_p = \langle 0 \rangle$,
这一任务是通过考虑全部输出自由度 (N_o) 和全部可用或可选的时间间隔来完成的。这样的结合就产生了下列超定方程组:

$$(b.4.3) \begin{bmatrix} \langle h((p-1)\Delta t) \rangle_1 & \dots & \langle h(0\Delta t) \rangle_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \langle h((N_t-1)\Delta t) \rangle_1 & \dots & \langle h((N_t-1)\Delta t) \rangle_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \langle h((n-1)\Delta t) \rangle_i & \dots & \langle h((n-1)\Delta t) \rangle_i \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \langle h((N_t-1)\Delta t) \rangle_{N_o} & \dots & \langle h((N_t-1)\Delta t) \rangle_{N_o} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [W]_1 \\ [W]_2 \\ \vdots \\ [W]_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\langle h(p\Delta t) \rangle_1 \\ \vdots \\ -\langle h(N_t\Delta t) \rangle_1 \\ \vdots \\ -\langle h(n\Delta t) \rangle_i \\ \vdots \\ -\langle h(N_t\Delta t) \rangle_{N_o} \end{bmatrix}$$

或简记为 $[h(n-1)][W] = [h(n)]$,

式中 N_t : 上一个可用时间采样。

最小二乘解从下面的“平方”方程组得出:

$$(b.4.4) [h(n-1)]^T [h(n-1)][W] = [h(n-1)]^T [h(n)]$$

式中 $[h(n-1)]^T [h(n-1)]$: 协方差矩阵。

相继考虑一阶系统、二阶系统……计算最小二乘误差,就可以得到最小二乘误差随系统阶数而变化的曲线。因为系统阶数 p 跟模态数 N_m 有关,因而这一方法可给出最小二乘误差与现有模态数之间的关系。图 b.4.7 表明,误差图随准确模态数急剧下降。

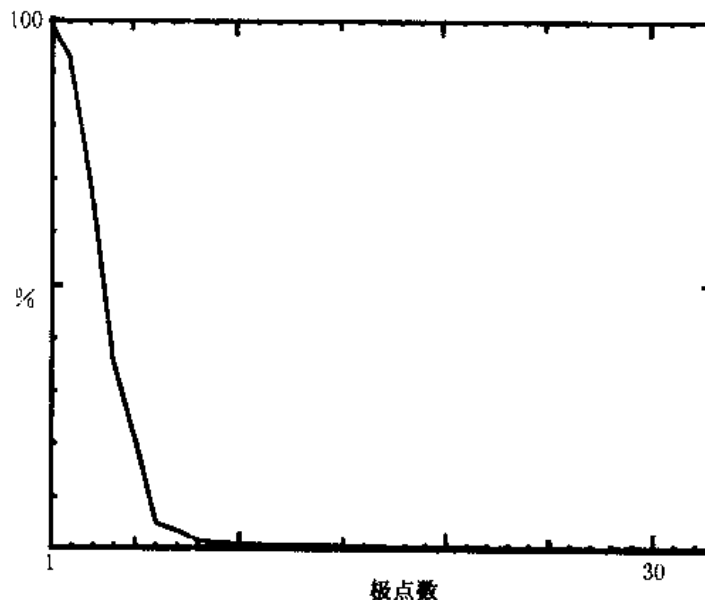


图 b.4.7 典型的误差图

对于频域直接参数识别法(A.3.5.4节),有一种奇异值图可用于同样的目的。我们根据下式可以获知模态数:

$$(b.4.5), \quad \begin{bmatrix} H(j\omega_1) \\ H(j\omega_2) \\ \cdots \\ H(j\omega_{N_f}) \end{bmatrix} = [P][\Lambda S \Lambda][R]^*{}^T,$$

式中 $[P]$ 、 $[R]$:正交矩阵,

$[\Lambda S \Lambda]$:由 N_0 个奇异值构成的对角矩阵,这 N_0 个奇异值是:

$$s_1 \geq s_2 \geq \cdots \geq s_N \geq s_{N+1} \approx s_{N+2} \approx \cdots \approx s_N \approx 0,$$

上式的奇异值图所以能指示出存在的模态数,根据的事实是: s_{N+1} 近似等于零,或比值 s_N/s_{N+1} 很大(见图 b.4.8)。

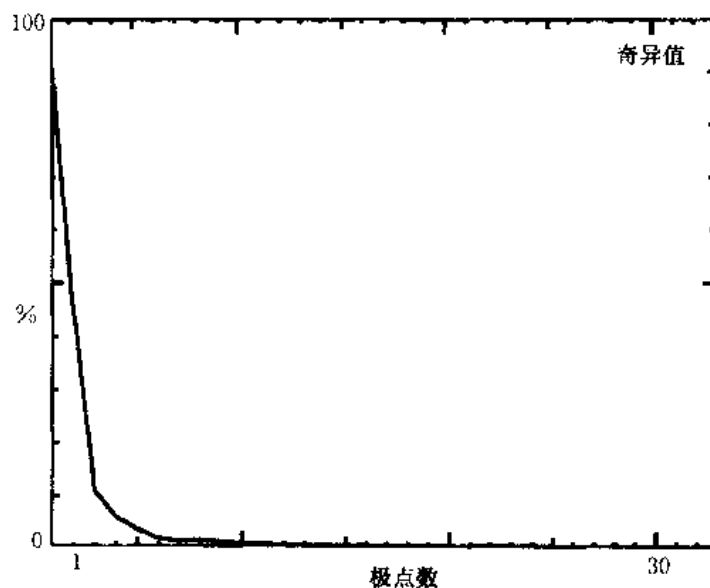


图 b.4.8 典型的奇异值图

B.4.1.4.4 整体参数稳态图

稳态图(图 b.4.9)的原理与误差图类似。我们假定极点数继续增加,每次增加,稳态图都指明在频率轴上的什么位置发现极点。非现实的极点(如阻尼系数 σ_r 为正的极点)不予表示。物理极点将总是作为“稳定极点”出现,几乎与假定的模态数无关,也就是说,这些极点不随极点假定数的增加而改变。相反,力图将数据中的噪声也模型化的计算模态,会随着模态假定数的增加而变化。改变关于频率、阻尼和/或模态参预因子的稳态标准,可以给出更多关于估计过程的信息。因此,稳态图不但给出所存在的模态数的强烈指示,而且是确定物理极点“最佳”估计的最强有力的工具(B.4.1.5节)。

B.4.1.5 极点估计

虽然整体参数稳态图对于估计物理极点数非常有用,但它只是正确选择系统的物理极点的基础。图 b.4.9 表示小阻尼结构的一种典型的稳态图,其背景是相应的“频响函数和”曲线,也可以是其他形式的曲线,如模态指示函数、单个频响函数等。

表 b.4.1 MAC 值: 模态仅来自垂直于板面的测量数据

$ \omega_{r,i} - \omega_{r,i-1} < f\% ?$ 否 是 ↓		→	'd'
$ \sigma_{r,i} - \sigma_{r,i-1} < d\% ?$	$ \langle L \rangle_{r,i} - \langle L \rangle_{r,i-1} < v\% ?$		
否	否	→	'f'
否	是	→	'v'
是	否	→	'd'
是	是	→	's'

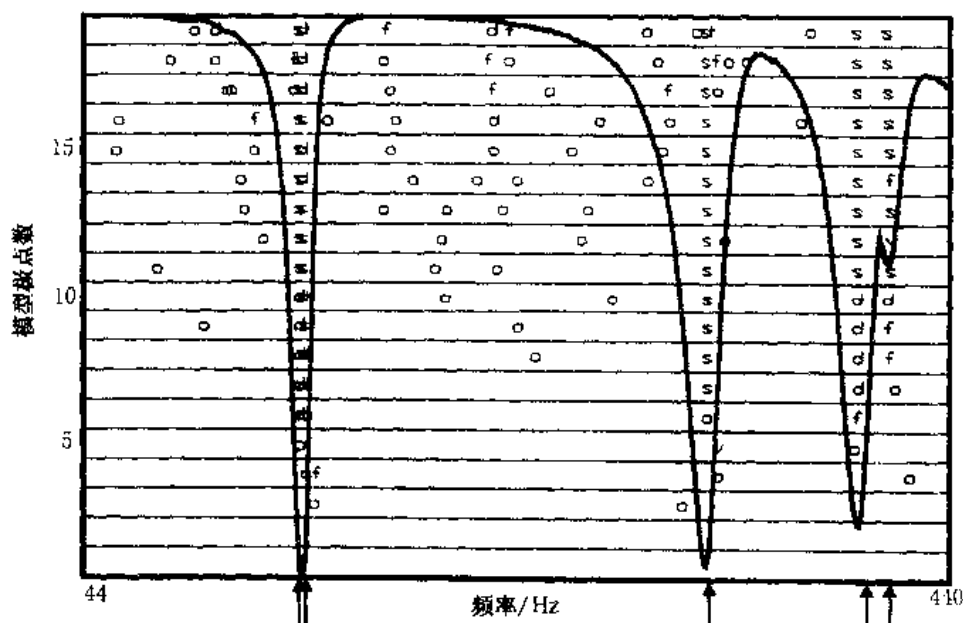


图 b.4.9 典型的稳态图

开始时的假定极点数很少,都是计算极点,标以 o ,表示该程序在那个频率上没有预先找到极点。随着假定极点数的增加,这些 o 就演化为 f , d , v 和 s 等,分别表明预先已找到了那个频率(在给定的精度内)、频率和阻尼稳定、频率和模态参预因子稳定、所有三种参数全部稳定(每个参数都处在给定的精度范围之内)(表 b.4.1)。但是,这种选择并不总是泾渭分明,特别是在模态耦合紧密和/或阻尼较大时,选择主要靠经验,靠工程师的判断力,靠反复试探。由于允许从各种不同阶次的模型(即从图中不同的水平线)选择物理极点,因而常规做法是把值比较一致的 s 看成一个极点。

虽然极点的选择正确与否最终由模态模型验证阶段(A.4 章,B.4.2 节)判定,但是分析员查看一下阻尼估计,就能得到关于极点选择质量如何的某些指示。阻尼比奇高(如高于临界阻尼的 8%)或极低,往往说明那是个非物理极点。因为最后的检验和选取要在模态模型验证阶段进行,所以不抛弃此时已经得到的模棱两可的极点是一种良好的做法。但是,如果估计出模态向量并经模态模型验证之后,确认这些模棱两可的极点为非物理极点,那么应当舍弃之,重

新进行模态向量估计。这样做,将改善剩下的、“好”的系统极点的估计。

B.4.1.6 模态向量估计

A.3 章介绍了几种模态参数估计方法,可几乎同时用以估计整体参数(系统极点和模态参预因子)和局部参数(模态位移)。但估计过程一般分两步进行:作为第一步的结果,系统极点和模态参预因子求得之后,第二步再估计模态位移。

虽然好几种方法都可以用(A.3 章),但以最小二乘频域法最为通行。知道系统极点和模态参预因子之前,先将这种基本上是非线性的方法转换成线性的最小二乘方法。

基本方程为(见 A.3.1 节和 A.3.5.1 节):

$$(b.4.6) \quad [H(j\omega)]_{N_o \times N_i} = \sum_{r=1}^{N_n} \left\{ \frac{\{\Psi\}_r \langle L \rangle_r}{(j\omega - \lambda_r)} + \frac{\{\Psi\}_r^* \langle L \rangle_r^*}{(j\omega - \lambda_r^*)} \right\} + [UR] + \frac{[LR]}{\omega^2},$$

式中 N_o :输出数,

N_i :输入数,

$[UR]$:上剩余项矩阵;

$[LR]$:下剩余项矩阵。

上剩余项近似反映处于频带范围以上的那些模态的影响,下剩余项近似反映处于频带范围以下的那些模态的影响。通常,操作者在参数估计过程中这两个剩余项都会选用。时域法不能考虑这些频带外模态的影响,指出这一点很重要。

因为参数估计的第二步是得出尚缺的模态参数(即模态位移),所以为了重新构造出测量得来的频响函数,要把全部可以利用的信息用于方程(b.4.6)。直接比较原始测得的频响函数和重新构造(综合)出来的频响函数,在模态模型验证时是一种重要的方法。

图 b.4.10 对测量下来的频响函数和两个综合得来的频响函数进行比较,其中一个综合频响函数考虑剩余项,另一个不考虑剩余项。图中清楚地表明了使用剩余项的良好效果。

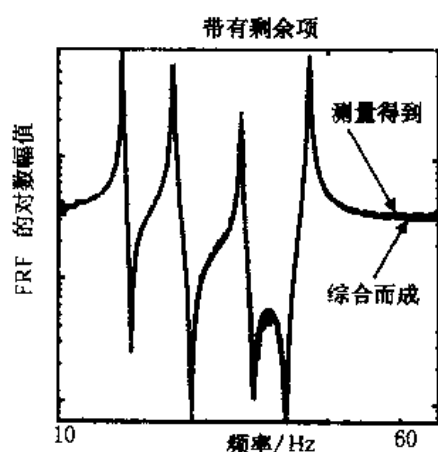


图 b.4.10a 实测频响函数与综合频响函数
(带有剩余项)

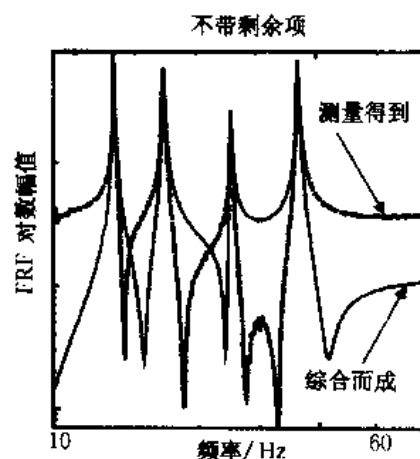


图 b.4.10b 测得的频响函数与综合的频响函数
(不带剩余项)

B.4.1.7 小 结

当前计算机的迅速发展使人认为:模态参数估计几乎是一种黑箱式方法。情况当然不是这样。大量的工程判断能力、经验和试凑法是必要的。最新计算机系统的主要优点是速度很快,试探过程也很快,这就能使分析者用各种不同的方法、不同的测量设置、不同的频带和/或时段等等进行实验。另一个优点是新一代计算机的强大功能允许采用更为复杂的先进技术,一般能同时处理较过去更多的数据。

在模态参数识别过程中,重要的是只利用尽可能多的准确的测量数据。噪声大或靠不住的数据是收敛差、估计不好的主要原因。

正确选择频带和时段可以改善估计过程。从这个角度看,重要的是要明确,时域法不能考虑带外效应。

频响函数之和,模态指示函数,误差图,奇异值图以及稳态图等对于估计系统中的物理极点都是很有用的工具。从实践和数值计算的观点考虑,所选频带内的物理模态一般不应当超过 10 个。

稳态图在选择正确的系统极点时是个极大的帮助。在这一步,好的做法是不要轻易忽略模糊不清的极点。虽然它们看起来不那么可靠,但也可能包含有关于某些(几近被忽视的)动态现象的信息。在模型验证阶段,不佳的极点将被去除,然后重新整理与剩下的极点相对应的向量。

模态参数估计程序的最后一步是确定模态位移,得到这一信息后,模态模型便告完成。在此过程中,将实测的频响函数与重新构造的频响函数加以比较构成了模态模型验证的重要方法。

B.4.2 模态模型验证

B.4.2.0 引 言

A.4 章讨论了用于模态模型验证的若干方法的理论背景,这些模态模型都是从实测频响函数估计出来的。本节将研究某些模态模型验证方法的实际意义。如 A.4 章所提及,没有哪一种方法能万无一失地指示出模态模型的正确性。但是,将若干方法所提供的信息同先验经验、审度力、工程判断力相结合,对模态模型的正确性将会得出合理的评判。估计得好的模态无疑将被认可,对那些与模糊极点相关联的、参数估计阶段留在模态模型中的模态,模型验证法将向分析者提供决定取舍它们的有用信息。

B.4.2.1 频响函数综合

B.4.1.6 节已经提到,频响函数综合是模态模型验证所使用的重要工具。从估计出来的模态模型综合而来的频响函数应当与测量得来的频响函数在测量精度之内相一致。一般,在模态分析中,尤其在共振频率附近,二者匹配得应相当紧密,因为这部分数据在估计模态参数时是最重要的。图 b.4.10 给出了测量频响函数和两个估计频响函数之间的典型比较。

另一方面,特别要指出,测量频响函数与重构频响函数之间即使匹配得很好,也不能保证模态参数估计很好,这是因为,如果考虑的极点(包括许多非物理极点)足够多的话,几乎任何频响函数都可以拟合得很好。

不包含参考点的频响函数的准确综合是个严格得多、可靠得多的质量指标,但要求额外测量数据。

B.4.2.2 模态置信准则

A.4.1 节描述了模态比例因子(MSF)和模态置信准则(MAC)的数学背景。模态比例因子是两个向量之间比例换算因子的最小二乘估计。模态置信准则就是对应的相关系数。如果模态置信准则是 1,那么这两个向量按某一比例因子,即模态比例因子,是完全等同的。如果模态置信度是 0,则两个向量之间不存在线性关系,估计出来的模态比例系数毫无意义。

如果用几种方法来估计模态向量,那么 MAC 矩阵就是一个有用的比较工具和评估手段。MAC 矩阵含有所有可能的向量对的 MAC 值。描述同一物理模态的两个向量,其 MAC 值应当接近于 1(或 100,因 MAC 常表示成百分数)。描述不同模态的两个向量之 MAC 值一般应比较小(如小于 10%)。不能指望 MAC 是理想的零值,因为正如 A.1.2.7 节所述,不同的模态只有在被质量或刚度矩阵加权条件下(在比例阻尼情况中)才是正交的。

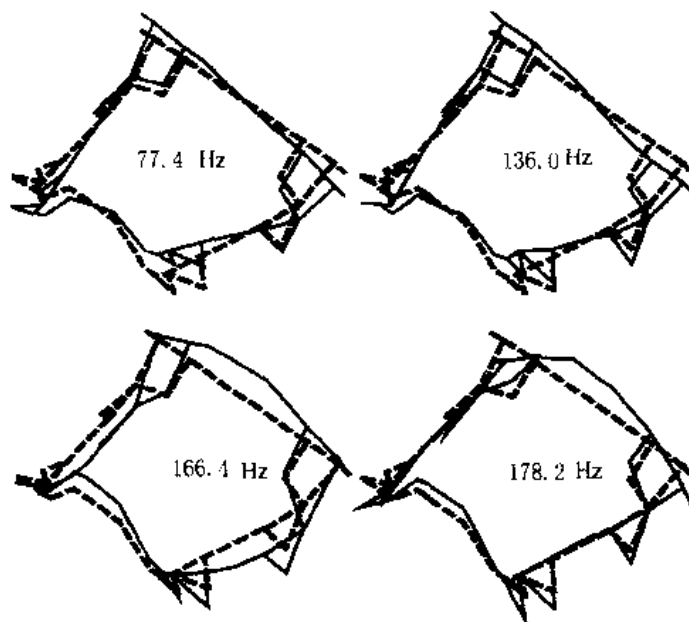


图 b.4.11a 引擎底座;只进行垂直板面的测量所得模态

表 b.4.2a MAC 值:只在垂直于板面方向测量所得模态

频率/Hz	模态 1 77.43	模态 2 135.98	模态 3 166.38	模态 4 178.16
模态 1: 77.43	100.0			
模态 2: 135.98	83.6	100.0		
模态 3: 166.38	0.3	0.0	100.0	
模态 4: 178.16	0.9	0.1	35.3	100.0

有些测量分析系统会按照模态向量格式储存剩余项(B.4.1.6 节),这些剩余项因此可能出现在模态矩阵中。但它们不是模态向量,故在解释 MAC 矩阵时应当不予考虑。

出现在 MAC 矩阵中的典型现象及相应解释列于下面:

- 同一个物理模态的两种估计之间的 MAC 值低(例如 $< 90\%$): 至少其中一种估计不良。这就要检查一下估计的某一阶模态是不是由于试验中因激励不良而出现的(参见 B.4.2.3 节), 或是否由于参数估计方案不周; 查看该模态的一般重要性; 如果它很小, 或是个很局部的模态, 那么估计不良便可想而知了。

- 两个模态频率相近, 其 MAC 值高(例如 $> 35\%$): 这表明, 至少结构上有两部分其模态很相似。要从结构和响应传感器的安装位置看看这是否可能(亦见 B.2.2.3 节)。如果这两个模态频率很接近, 那么问题在于: 是否实际上就存在两个模态? 是否由于测量中间微小的频率偏移致使估计过程产生了两个模态?

- 频率相差悬殊的两个不同模态的估计之间的 MAC 值高(例如 $> 35\%$): 这种现象强烈表明试验设置破坏了可观测性的基本假设; 传感器数量之不足或安装位置之不当致使产生了两个相似模态, 而结构的未测部分很可能变形不同(B.2.2.3 节)。一个典型的例子是传感器只测板的垂直于板面方向的运动, 结果使基本上是顺板面的模态的在垂直方向的分量可能相似于某一垂直板面的模态(见图 b.4.11a 和表 b.4.2)。另一个例子是这样的情况, 悬挂装置的模态非常接近于某一结构模态, 于是该模态将被分成两个模态, 分别与悬挂装置的运动反向(见 B.2.2.1 节)。

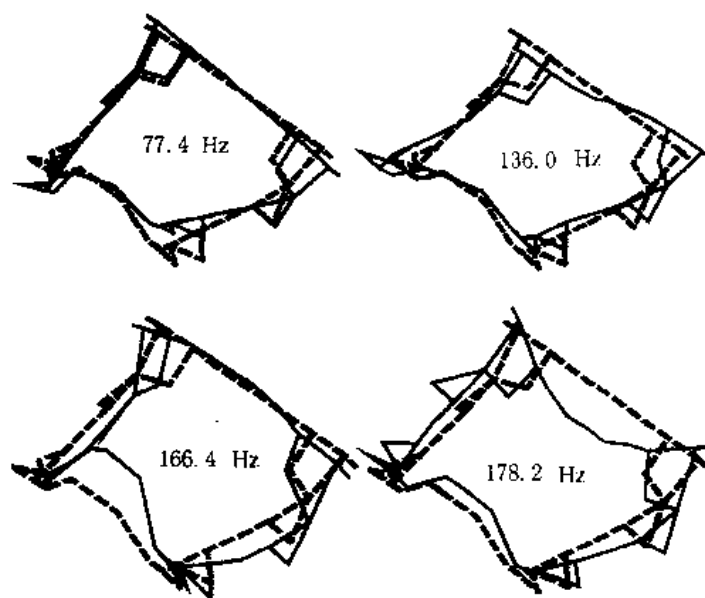


图 b.4.11b 引擎框架: 从 $x-y-z$ 三向测量所得模态

表 b.4.2b MAC 值: 从 $x-y-z$ 三向测量得出的模态

频率/Hz	模态 1 77.40	模态 2 135.97	模态 3 166.32	模态 4 178.16
模态 1: 77.40	100.0			
模态 2: 135.97	2.6	100.0		
模态 3: 166.32	0.1	0.1	100.0	
模态 4: 178.16	0.1	0.0	4.5	100.0

如果同一个物理模态的两种估计之间的 MAC 值高,则可以根据相应的模态比例因子进行相对比例换算。如果这两种估计都是根据正确校准过的测量进行的,那么 MSF 的值应接近于 1。

B.4.2.3 模态参预

模态参预是一个工具,用以研究各个模态在测得的频响函数组中的相对重要性以及所选各输入自由度的有效性(见表 b 4.3 和 A.4.2 节)。

表 b.4.3 模态参预

	输入 1	...	输入 N_i	总输入
模态 1	$MP_{11} = \sum_{o=1}^{N_o} A_{o11} $		$MP_{N_i1} = \sum_{o=1}^{N_o} A_{oN_i1} $	$\sum_{i=1}^{N_i} MP_{i1}$
...				
模态 N_m	$MP_{1N_m} = \sum_{o=1}^{N_o} A_{o1N_m} $		$MP_{N_iN_m} = \sum_{o=1}^{N_o} A_{oN_iN_m} $	$\sum_{i=1}^{N_i} MP_{iN_m}$
总模态	$\sum_{r=1}^{N_m} MP_{1r}$		$\sum_{r=1}^{N_m} MP_{N_i r}$	

注: A_{or} : o 点输出、 r 点输入时模态 r 的留数; N_o : 输出自由度数; N_i : 输入自由度数; N_m : 模态数。

典型的模态参预表如表 b.4.4(引擎底座)那样,按比较通行的方式示出所有的值。重要的是要从所考虑的向量组中删除剩余项向量(B.4.1.6 节),因为它们可使信息完全扭曲。

表 b.4.4 模态参预表(引擎底座)

频率/Hz	输入; 408; + Y	输入; 316; + Z	总(输入)
模态 1; 77.59	14.0	100.0	53.5
模态 2; 135.96	100.0	45.1	12.4
模态 3; 166.33	52.8	100.0	6.5
模态 4; 178.13	100.0	94.4	14.4
模态 5; 271.30	5.8	100.0	2.4
模态 6; 291.18	100.0	65.5	1.3
模态 7; 314.88	100.0	83.7	9.4
总(模态)	30.8	69.2	100.0

从这样的模态参预表可得如下典型结论:

- 任一行 r 给出的是各个输入对于激出第 r 阶模态的相对有效性概念。这一信息可以解释为什么有些模态估计得出的 MAC 值很差(B.4.2.2 节);如果测量过程中某个模态被激励得较好,对它的估计就更准确。如果我们想对某阶模态进行准确估计,而这个模态由某激励

点激励得又很不好,那么就不要采用来自该激励点的信息而重新估计模态参数,这样做可以改善结果的精度。在引擎底座例子中,408; + Y 点的输入对第五阶模态激励得很差,这表明该输入点位置距离第五阶模态的某个节点太近。

- “总模态”这一行给出的是总的输出关于各个输入的分布情况的估计。试验做得好的话,输出在各个激励点的分布基本相等。如果一个激励点明显地比其他点表现恶劣,则摒弃来自此点的信息而重新估计参数,可能不失为一个好主意。在引擎底座例中,来自 316; + Z 点比来自 408; + Y 点的输入好大约两倍。

- 任一列 i 表示激励点 i 激出的哪个模态最好。

- “总输入”这一列综合了各列的信息。通常,该列中的值具有随频率(和模态振型复杂性)的增加而降低的倾向。此值很低的模态,各个激励点对它的激励效果都很差,因而相应的模态参数估计之精度可能很低。这或许可以解释为什么该模态在 MAC 和模态复杂性方面表现低劣(B.4.2.4 节)。解决这个问题的惟一方法是,仔细观察这一阶模态振型,并用至少一个安装在该模态的反节点处的激振器重新进行试验。引擎底座的模态 5 和模态 6 激励得很差。

一般说来,模态参预矩阵不能说明模态估计质量的好坏。但因它可以给出关于激励效果的信息,故常常能明确指出为什么有些估计那么不好。同样的理由,它还能告诫分析员,解释激励不良的模态时要特别小心。

B.4.2.4 模态复杂性 模态相位共线性

A.4.4 节讨论了模态复杂性指标的理论背景。它的根据是这样一个物理上的事实:给结构增加一个质量会使共振频率降低,因此每个共振频率 ω_r 对于在 m 处的质量变化 ΔM_m 的变化率必定为负值:

$$(b.4.7) \quad \frac{\partial \omega_r}{\partial M_m} = \text{Im} \left[\frac{\partial \lambda_r}{\partial M_m} \right] = \text{Im}(-\lambda_r^2 \Psi_{mr} L_{rm}),$$

假定互易性成立,此式可变为下式:

$$(b.4.8) \quad \frac{\partial \omega_r}{\partial M_m} = \text{Im} \left[\frac{\partial \lambda_r}{\partial M_m} \right] = \text{Im}(-\lambda_r^2 \Psi_{mr}^2 Q_r),$$

借助测得的留数表示该式,则有:

$$(b.4.9) \quad \frac{\partial \omega_r}{\partial M_m} = \text{Im}(-\lambda_r^2 \Psi_{mr}^2 Q_r) = \text{Im}(-\lambda_r^2 A_{mmr}) = \text{Im} \left(-\lambda_r^2 \frac{A_{mir}^2}{A_{iir}} \right),$$

式中的 i 表示任一个激励自由度。于是,灵敏度可以从任何激励点的留数计算得到。理论上,无论用哪个激励点结果都应相同,但实践上并不总是这样。从模态复杂性表(表 b.4.5)我们可以得到如下典型的结果和结论:

表 b.4.5 模态复杂性表(引擎底座)

频率 /Hz	模态 1 77.59	模态 2 135.96	模态 3 166.33	模态 4 178.13	模态 5 271.30	模态 6 291.18	模态 7 314.88
408; + Y	100.0	100.0	100.0	99.9	0.9	58.9	99.6
316; + Z	100.0	100.0	100.0	100.0	98.0	92.8	99.6

- 高值(接近 100%)表明相应的模态不“过复杂”,很好地符合质量灵敏度规则。
- 对于某一激励点 i ,所有模态都是低值($< 10\%$),则极有可能是测量中间把激振力的符号搞反了。

- 观察一个模态时,如发现模态复杂性值对一个激励点是高的,而对另一个激励点却很低,这可能是由于这样的事实:第二个激励点过于靠近模态的实际节点。激励点在所估计模态的节点附近的轻微偏移,可以引起该模态激励的符号错误。本例中,激励点 408; + Y 对于第五阶模态就是这种情形(亦可见表 b.4.4)。

- 相对比较低的值(例如 30%至 70%)表示是个过复杂模态。该模态估计错误。模态参预和 MAC 矩阵可以给出关于估计低劣原因的更深刻理解。对于与模糊极点和激励不良有关的模态,这种情况是经常发生的。本例中的模态 6 便是这种典型情况(亦可见表 b.4.4)。

模态相位共线性(A.4.5 节)所提供的信息与模态复杂性类似,但只对纯模态,即比例阻尼情形,是正确的。模态相位共线性与平均相位偏移相结合,其解释与模态复杂性类似,要时刻记住纯模态这个条件。对于纯模态,模态相位共线性应当是 1,平均相位偏移应当是零。表 b.4.6 表明,模态 6 关于这条准则表现也很差。

剩余项向量(见 B.4.1.6 节)的模态相位共线性和平均相位偏移毫无意义

表 b.4.6 模态相位共线性和平均相位偏移(引擎底座)

频率 /Hz	模态 1 77.59	模态 2 135.96	模态 3 166.33	模态 4 178.13	模态 5 271.30	模态 6 291.18	模态 7 314.88
MPC/%	99.4	98.5	95.9	98.5	97.3	95.3	97.1
MPD/deg	4.65	7.43	11.73	7.15	9.52	13.73	10.08

B.4.2.5 小 结

模态模型验证技术的实际应用是怎样把数学工具、经验、直观感觉以及工程判断能力最佳结合起来以产生最佳结果的典型例子。在这种情况下,模态参数的最佳选择可得以实现。

综合频响函数可以检验估计模态参数是否与实测频响函数相吻合。模态置信准则对各模态估计之间可能的相互作用予以评估,并对同一模态的不同估计进行比较。模态复杂性和模态相位共线性分别检查复模态与纯模态的相位特征。模态参预矩阵经常可以解释为什么有些估计欠佳,因为它可给出关于激励有效性的信息。

B.4.3 结 论

本章论述了 A.3 和 A.4 章曾在理论上研究过的参数估计方法和模态模型验证技术的更加实际的方面。我们已经说明,实践上,只有将数学工具与经验、直观感觉、工程判断力富有成效地结合起来,才能根据给定的测量数据得出最佳的模态模型。

最新式的处理系统的主要优点是,它们速度快,试验进程快,因而可以使实验人员在各种不同的条件下采用各种方法进行实验。并且能够抵御这样的危险:功能强大的系统使参数估计和模态模型验证方法看似黑箱技术。透彻了解每一操作之后将会发生什么事情,依然重要。

模态参数识别过程中尽可能避免噪声大的、靠不住的数据是很要紧的,因为这样的数据是使估计变糟的主要原因。正确估计频带和时段可以改善估计过程。因此应当明确,时域法是最常用的参数估计方法之一,但它不能考虑带外效应。频响函数之和、模态指示函数、误差图或奇异值图以及稳态图等对于估计系统中的物理极点数都是非常重要的工具。稳态图在选择正确的系统极点时用处很大。在选择极点时,良好的做法是不要轻易丢弃模糊极点,不好的极点留待模型验证阶段解决。模态参数识别过程的最后一步是确定模态位移,这一信息使模态模型得以完成。

在模态模型验证阶段有几种数学工具可以应用。综合频响函数可以检验由模态参数估计出来的频响函数与实测频响函数之间的相关关系是否正确。模态置信准则可以比较由一种或多种方法估计出来的模态。模态复杂性和模态相位共线性分别检验复模态和纯模态的相位特征。模态参预矩阵时常提供对激励效果的深刻见解。

附 录

AA.2.1 几个时间函数和频率函数的应用

为了分析振动和噪声现象,有几类函数需要研究。这些函数可以是时间信号或频率信号,但通常只有将他们结合使用才能确切地评估振动和噪声。本章将讨论这几种函数:在频域中有自功率谱,互功率谱,相干函数及频响函数,在时域中有自相关函数,互相关函数和脉冲响应函数,还有倒谱(Cepstrum)函数。下面几节将给出这些函数的定义,并说明它们在模态分析中的应用。

AA.2.1.1 自功率谱与自相关函数

时间信号 $a(t)$ 的自功率谱是:

$$(aa.2.1) \quad G_{AA}(f) = A^*(f) A(f),$$

这里, $A(f)$ 是 $a(t)$ 的傅立叶变换,星号 * 表示复数共轭。自功率谱表示一个信号中平均功率是怎样按频率分布的。

暂态时间信号 $a(t)$ 的自相关函数定义为:

$$(aa.2.2) \quad R_{aa}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} a(t) a(t + \tau) dt.$$

稳态信号的自相关函数定义为:

$$(aa.2.3) \quad R_{aa}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{T} \right) \int_{-T/2}^{+T/2} a(t) a(t + \tau) dt.$$

可以证明(参考文献 a.2.9),自功率谱 G_{AA} 和自相关函数 R_{aa} 构成一个傅立叶变换对(维纳-辛钦关系)。

自功率谱一个重要的应用领域是旋转机械的特性分析。每一种旋转机械缺陷都产生一组惟一的可用以鉴别此种缺陷的振动分量。这一节我们将简单描述关于一些常见机械缺陷的振动模式(特征)。

不平衡

所有机械中都一定程度地存在转子或轴的不平衡问题,其特征可用频率为每转一次的正弦振动来表述。不平衡是个旋转矢量,其振幅随转速的提高而增大。一般地说,不平衡不会产生高量级的谐波分量。但是,常被误认为是不平衡的缺陷,例如不同轴性,一般会产生高量级谐波。因此分析设备的分辨率要足够高,以便能够检测到所含的这些谐波。

不同轴性

由于不同轴性而引起的振动,其特征表现是二次谐波分量大,轴向振动量级高(见图 aa.2.1和 aa.2.2,参考文献 a.2.14)。如果一根不同心的轴由滚珠轴承支撑,那么这种特征性

的轴承频率也可能出现。弯曲的轴和安装不当的轴承都是不同轴性的具体例子,都产生类似的振动。因不同轴而引起的轴两端轴向振动的相对相位一般是 180° ,这跟不平衡所引起的轴向振动情况相反,此时两端相位相同。

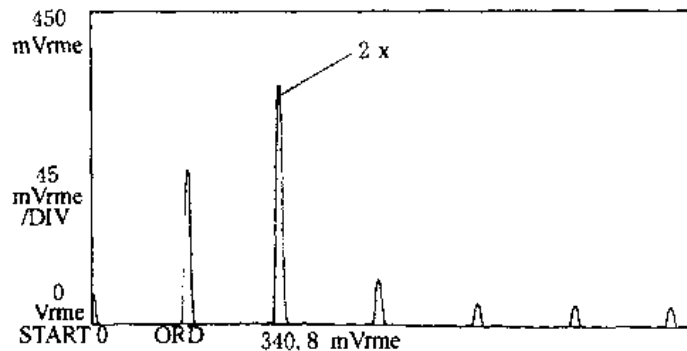


图 aa.2.1 不同轴情况下的高二次谐波

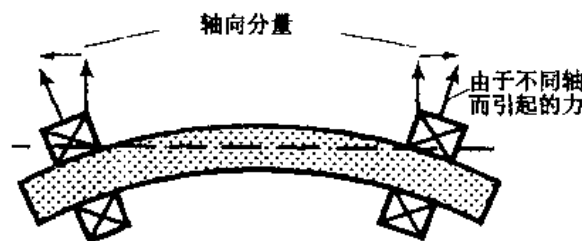


图 aa.2.2 不同轴引起严重的轴向振动

共 振

随着旋转,当轴、机壳或其他部件的固有频率被高速旋转或其谐波激发出来时,机器共振就成为问题。这些问题很容易鉴别,因为转速升高或降低而不再与某一共振频率相一致时,振动量级会大大减小。分析这种现象时很有用的一种频谱表示方法叫做转速频谱图(又叫瀑布图,时间历程图,或 Campbell 图)。转速频谱图是由被测机器加速或减速期间的功率谱序列组成的。这样一来,每个谱都可根据某一特定转速范围或某一特定时刻来鉴别,因此这种频谱图是一种三维图形(频率,频谱幅值和时间或转速)。与诸如不平衡、不同轴、啮合进给量等有关的转动相关现象的频谱结构,将随转速而变化。转速升高,频谱分量将向高频移动。观察这些频率移动,我们便可以区别与转动有关及无关的现象。根据定义,共振是转动无关现象,在频谱图上很容易鉴别,因为共振将表现在竖直线上(参见图 aa.2.3,参考文献 a.2.14)。

滚珠轴承

滚珠轴承独有的振动特征使振动分析成为检测与分析轴承缺陷的有效工具。因轴承缺陷而导致的特殊频率与缺陷之类型、轴承几何尺寸(转子直径 d 、节圆直径 D 、滚珠数目 Z 、接触角 ϕ 等)以及转速(f_r)有关。表 aa.2.1 列出了轴承有缺陷时可能出现的各种频率(参考文献 a.2.15)。

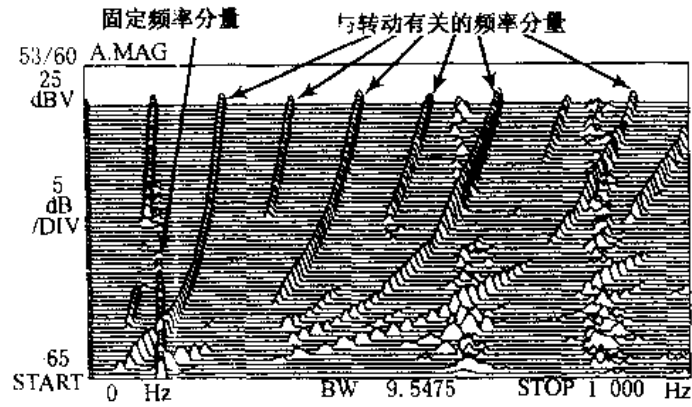


图 aa.2.3 含有旋转有关及无关分量的频谱图

表 aa.2.1 滚珠轴承的特征频率(参考文献 a.2.15)

(1)轴转动频率, f_s , $f_s = N/60$;	(8.4)
(2)外滚道静止时滚珠保持架的转动频率 $f_{b_{out}}$, $f_{b_{out}} = f_s/2 1 - (d/D)\cos\phi $;	(8.5)
(3)内滚道静止时滚珠保持架的转动频率 $f_{b_{int}}$, $f_{b_{int}} = f_s/2 1 + (d/D)\cos\phi $;	(8.6)
(4)滚动部件的转动频率 f_{rc} , $f_{rc} = f_s/2 (D/d) \{1 - (d/D)^2 \cos^2\phi\}$;	(8.7)
(5)滚动部件在静止外滚道上的通过频率 $f_{rep_{fo}}$, $f_{rep_{fo}} = Zf_s/2 1 - (d/D)\cos\phi $;	(8.8)
(6)滚动部件在静止内滚道上的通过频率 $f_{rep_{fi}}$, $f_{rep_{fi}} = Zf_s/2 1 + (d/D)\cos\phi $;	(8.9)
(7)滚动部件的自旋频率 f_{rsf} (滚动部件上一固定点与内外滚道之间的接触频率), $f_{rsf} = f_s (D/d) \{1 - (d/D)^2 \cos^2\phi\}$;	(8.10)
(8)外滚道静止时滚珠保持架与旋转内滚道之间的相对旋转频率 $f_{r_{cso}}$, $f_{r_{cso}} = f_s 1 - 0.5 1 - (d/D)\cos\phi $;	(8.11)
(9)内滚道静止时滚珠保持架与旋转外滚道之间的相对旋转频率 $f_{r_{csi}}$, $f_{r_{csi}} = f_s 1 - 0.5 1 + (d/D)\cos\phi $;	(8.12)
(10)外滚道静止时旋转部件与旋转内滚道上一固定点的接触频率 $f_{sc_{oi}}$, $f_{sc_{oi}} = Zf_s 1 - 0.5 1 - (d/D)\cos\phi $;	(8.13)
(11)内滚道静止时旋转部件与旋转外滚道上一固定点的接触频率 $f_{sc_{oi}}$, $f_{sc_{oi}} = Zf_s 1 - 0.5 1 + (d/D)\cos\phi $;	(8.14)
注: N :轴的转速, r/min(转数/分钟); d :滚珠直径; D :轴承的节径; ϕ :滚动部件与滚道之间的接触角(对于向心辐射式滚动轴承, $\phi = 0^\circ$); Z :滚动部件数。	

作为一个例子,图 aa.2.4(参考文献 a.2.14)给出了外滚道有缺陷的某轴承的振动功率谱。

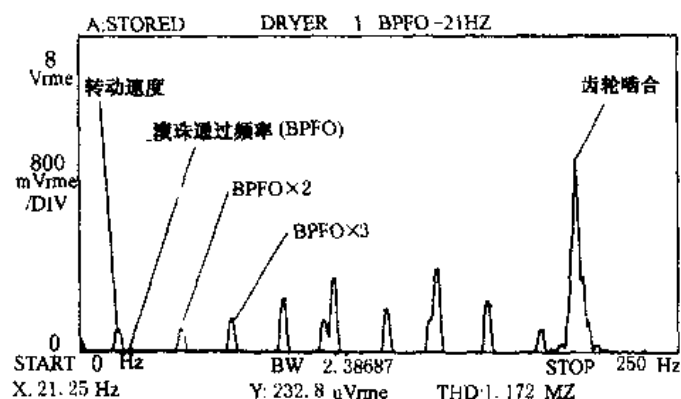


图 aa.2.4 外滚道有缺陷的轴承之功率谱

齿 轮

齿轮按转速乘以齿数而啮合,从而产生功率谱分量。正常的新齿轮箱产生的齿啮合频率谐波是很小的,但尤其当齿轮箱用旧后,谐波将增加。图 aa.2.5(参考文献 a.2.16)以简化谱演示了这种情况。

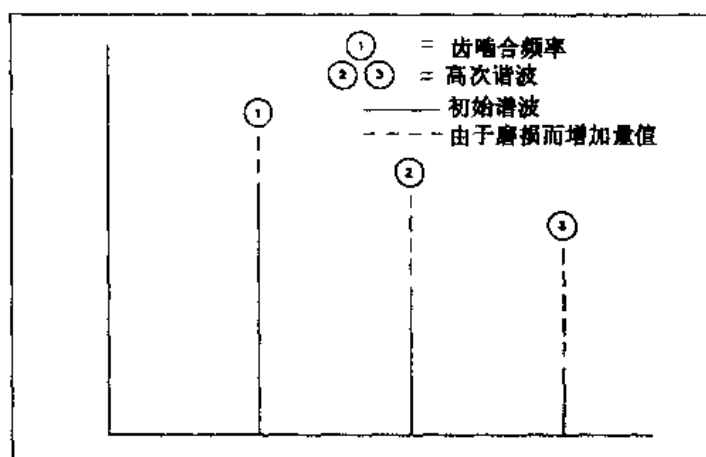


图 aa.2.5 磨损齿轮箱的简化功率谱

齿上的初始缺陷将引起频谱中出现较低边带,当此缺陷进一步发展时,边带就增大(图 aa.2.6,参考文献 a.2.16)。

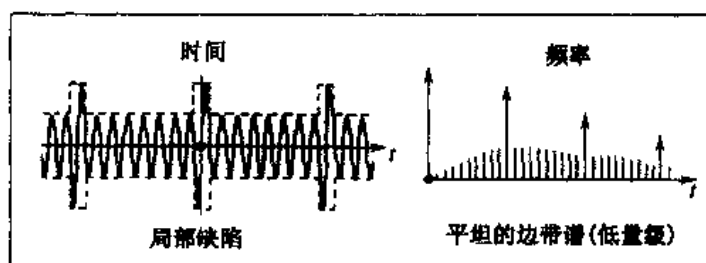


图 aa.2.6a 带有初始缺陷的齿轮箱的简化功率谱

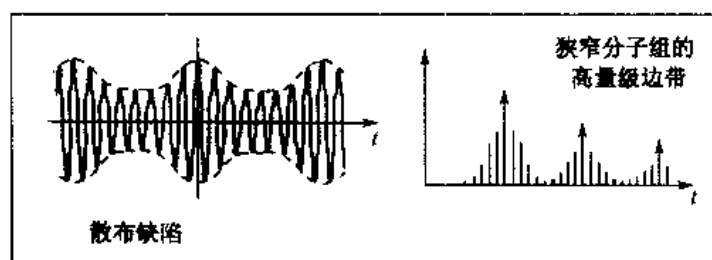


图 aa.2.6b 当初始缺陷发展时齿轮箱的简化功率谱

图 aa.2.7 表示一个齿轮箱在最初时和磨损后两种状态下的频谱。齿轮箱的磨损表现在齿啮合频率上频谱量级略有增加,但二次谐波和三次谐波增加很多。边带的增加表明局部初始缺陷的存在。初始功率谱中的“鬼”分量是由于齿轮的几何误差造成的,随着齿轮的磨合将逐渐消失。

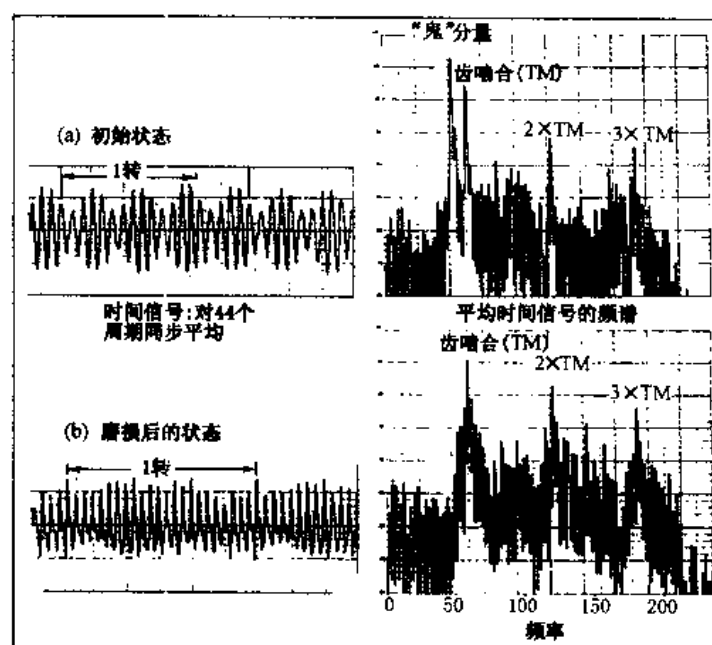


图 aa.2.7 齿轮箱频谱;原本状态及磨损状态

(a) 齿啮合频率及其谐波上的峰值表明磨损均匀;(b) 齿啮合频率与其谐波之间量级升高表示有初始缺陷

机械松动

通常包含齿轮罩的不正确安装。这些毛病极易使振动谱中产生大量谐波并产生极具方向性的振动。这一特点有助于区别松动还是转动不平衡。

一般情况

然而,旋转机械的功率谱会含有若干峰值,它们的起因是多方面的:轴承失效、齿轮啮合进

给、不平衡、不同轴、结构共振等。根据单单一个功率谱来辨别这些原因常常是不可能的。要确定振源,需要更多的信息资料,这些信息资料包括在各种不同工作条件下、不同位置、不同方向实测到的功率谱中。在旋转机械中,载荷与转速一般比较容易控制。

自功率谱和自相关函数也常用来检测信号中的回声(参考文献 a.2.9)。典型的例子是锤激试验中的双击或传声器捕捉到的声反射信号。

图 aa.2.8 表示与双击有关的输入输出信号和自功率谱。输入和响应自功率谱中周期性纹波清楚显示双击的存在。该纹波的频率周期性是两次连击之间的时间延迟的倒数。

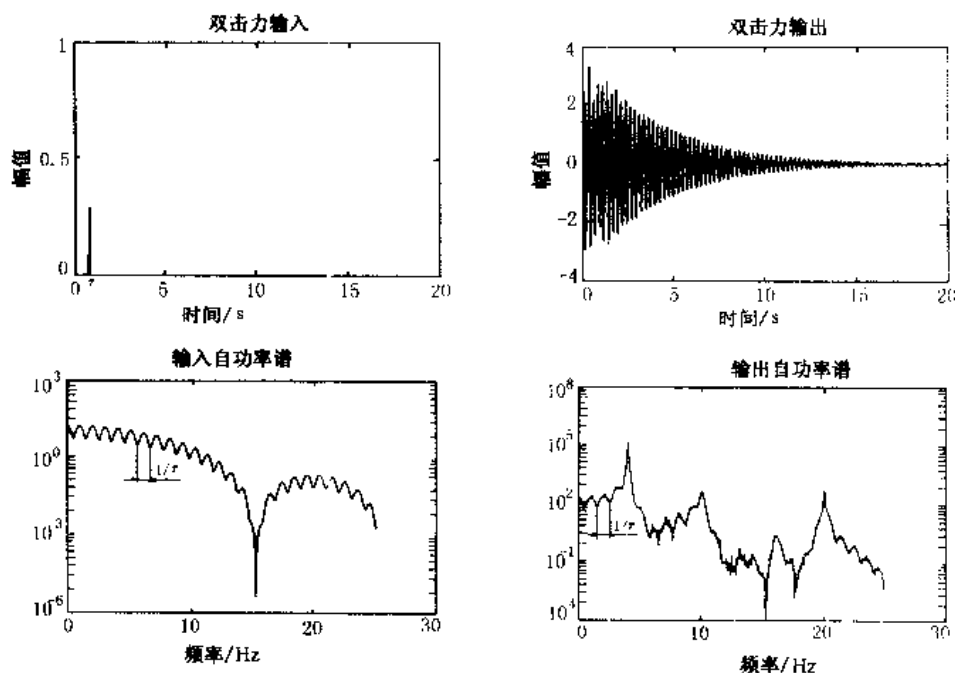


图 aa.2.8 双击:输入和输出,时间信号和自功率谱

图 aa.2.9(参考文献 a.2.13)描述传声器拾检含有回声的信号的情况。回声效应反映在传声器信号的自功率谱中(图 aa.2.10)。同以前所说周期性频率是时间延迟的度量一样,在这里周期性频率是两个声波传播距离之差的度量。

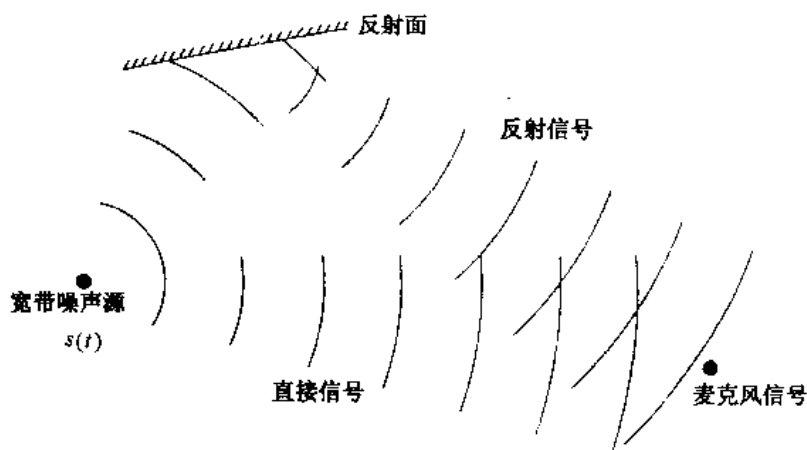


图 aa.2.9 反射信号声学试验

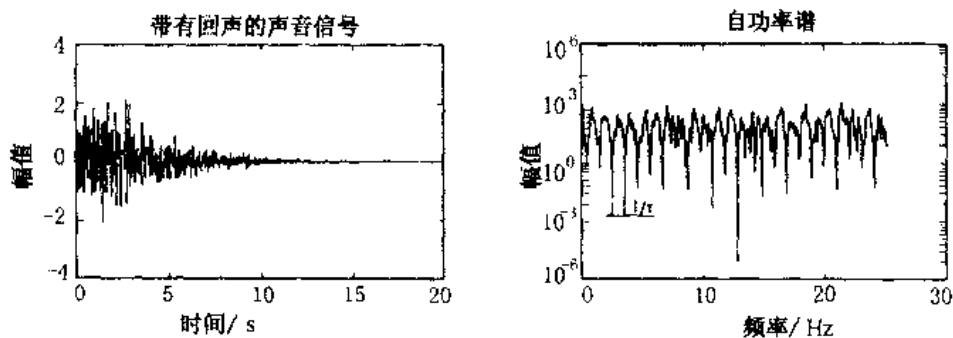


图 aa.2.10 带有回声的声音信号;时间信号和自功率谱

应当指出,倒谱分析(AA.2.1.3节)也是检测回声的得力工具。

自相关函数是检测淹没在噪声中的谐波信号的一种便捷工具。如图 aa.2.11 所示。

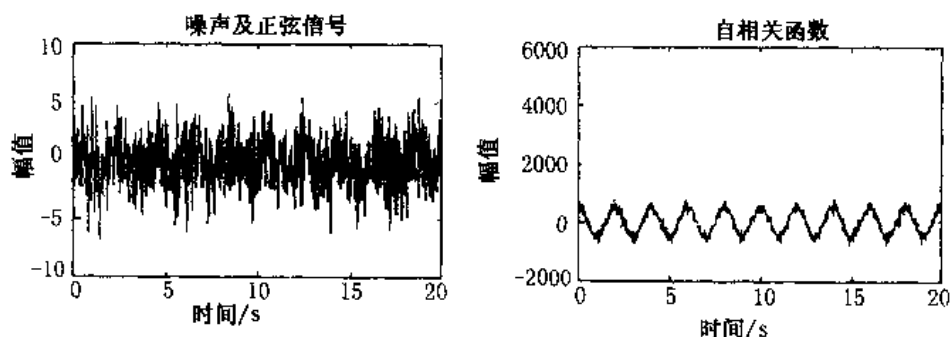


图 aa.2.11 淹没于噪声中的正弦波;时间信号和自相关函数

自功率谱的另一种应用是乐器方面。图 aa.2.12 表示在不同乐器上弹奏“sol”音的自功率谱。所有乐器的基频都是一样的,但谐波(即基频的整数倍)的数量和幅度大不相同。

AA.2.1.2 互功率谱与互相关函数

两个时间信号 $a(t)$ 和 $b(t)$ 之间的互功率谱为:

$$(aa.2.4) \quad G_{AB}(f) = A^*(f) B(f),$$

其中, $A(f)$ 和 $B(f)$ 分别是 $a(t)$ 和 $b(t)$ 的傅立叶变换, $*$ 号表示复数共轭。互功率谱的幅值是两个信号中每个频率上的联合功率的定量表示,而其相位则是各频率上联合功率的相对时间错动的量度。

暂态时间信号 $a(t)$ 和 $b(t)$ 之间的互相关函数是:

$$(aa.2.5) \quad R_{ab}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} a(t) b(t + \tau) dt.$$

对于稳态信号,互相关函数的定义如下:

$$(aa.2.6) \quad R_{ab}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{T} \right) \int_{-T/2}^{+T/2} a(t) b(t + \tau) dt.$$

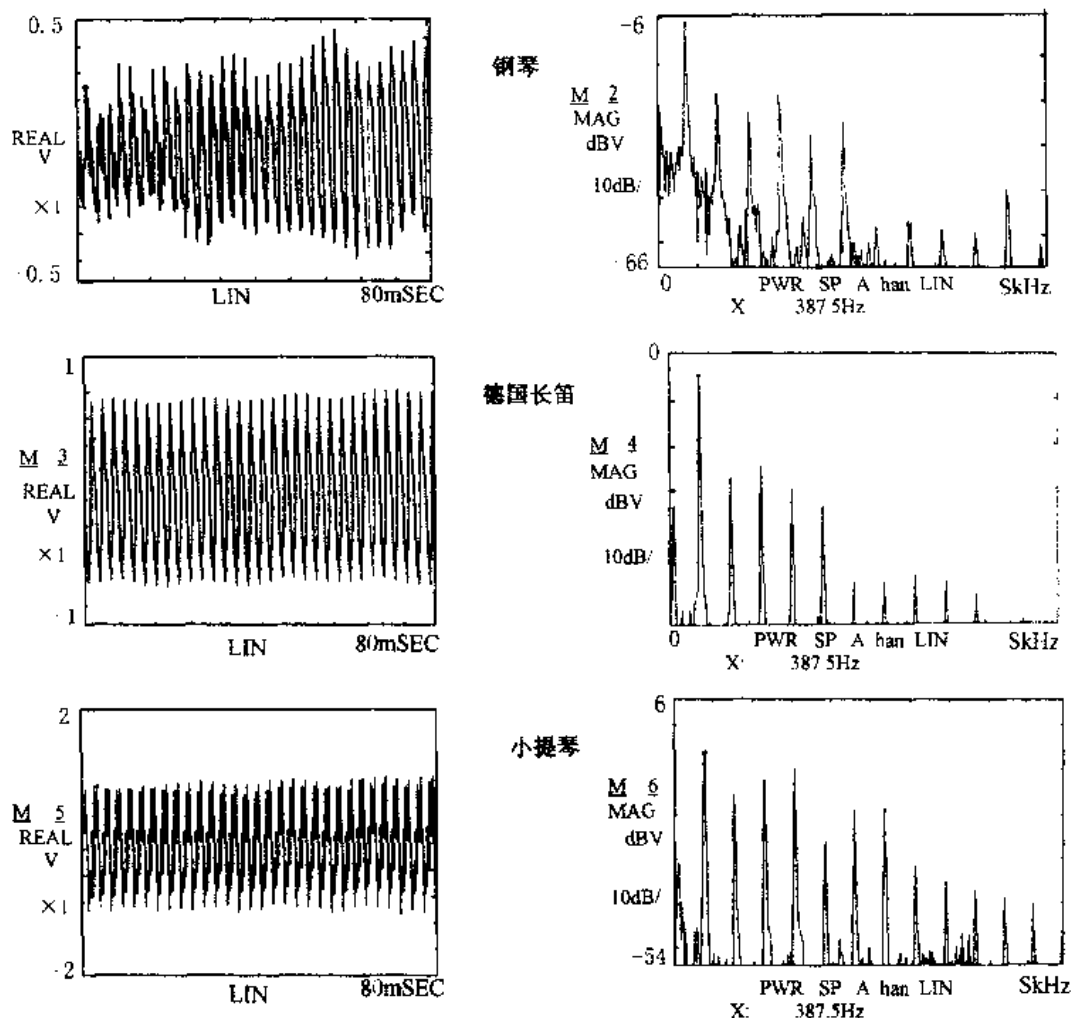


图 aa.2.12 各种乐器的“s”音:时间信号和自功率谱

同自功率谱和自相关函数一样,互功率谱和互相关函数也构成一对傅立叶变换(参考文献 a.2.9)。

“自”量与“互”量之间的关键区别是,互功率谱和互相关函数包含相移或时移信息,所以它们是检测并确定延迟的有用工具。典型的例子是噪声源处的信号和记录传声器处的信号之间的延迟(可参见图 aa.2.9)。图 aa.2.13 表示这样的原始信号和简单延迟 t_d 后的信号。

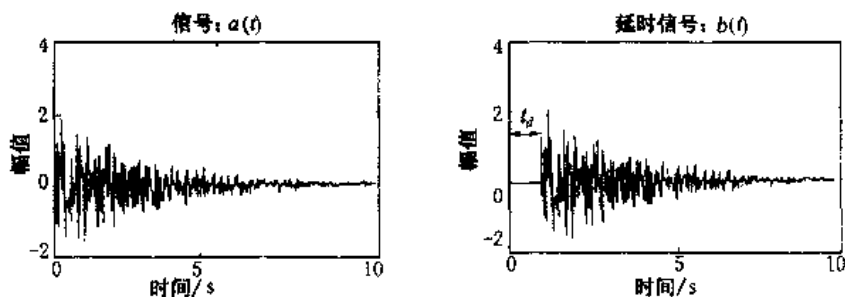


图 aa.2.13 原始信号 $a(t)$ 和简单延迟 t_d 的信号 $b(t)$

图 aa.2.14 表示这两个信号之间的互相关,其中在 $t = t_d$ 有明显的确定峰值。

在互功率谱中,时间延迟表现在互谱相位上(图 aa.2.15)。纯粹的时间延迟 t_d 导致的相移为 $-2\pi t_d f$ 弧度,因此对于单纯的时间延迟,互谱的相位曲线是一条斜率为 $-2\pi t_d$ rad/Hz(或 $-360 t_d$ 度/Hz)的直线。

互谱的另一个重要应用领域是估计声强。可以证明(参考文献 a.2.17),声强的有限差分近似由来自两个距离很近的麦克风的声压信号之间的互谱之虚部(频率加权)值决定(图 aa.2.16):

$$(aa.2.7) \quad I = \left(\frac{1}{4\pi\rho\Delta r} \right) \int_0^{f_{max}} \frac{\text{Im}(P_1 P_2^*)}{f} df$$

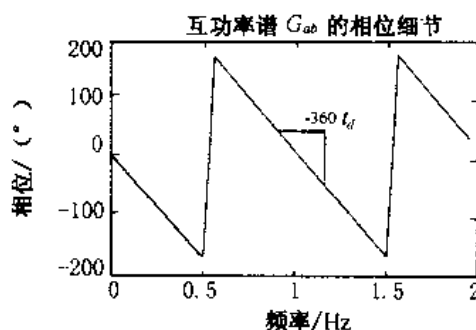
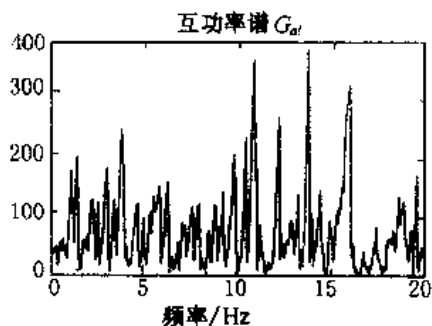


图 aa.2.15 原始信号和延时(t_d)信号之间的互功率谱(幅值及相位)

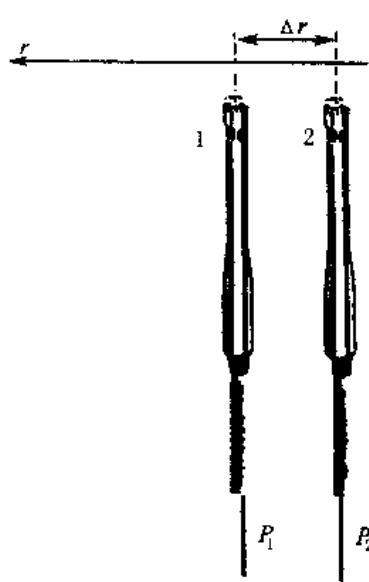


图 aa.2.16 声强测量装置

式中 ρ : 空气密度;

Δr : 两个麦克风之间的距离;

P_1 、 P_2 : 分别为麦克风 1 和 2 处声压的频谱。

互功率谱最通常的用途是计算两个信号之间的频响函数(FRF)(见 A.2.6.4 节)。

AA.2.1.3 倒谱分析

倒谱(Cepstrum)分析是一类分析技术中所使用的函数,它可以视为“对数谱的谱”。事实上,Cepstrum 的由来可以追溯到 1963 年,那时把 Cepstrum 定义为“对数功率谱的功率谱”,并把它看成是检测地震信号中的回声所用的自相关函数的较好的替代物。cepstrum 一词是把 spectrum 的前四个字母颠倒次序得来的。类似地,cepstrum 的横坐标代表 quefrequencies (倒频率),而且如果有谐波存在,则称之为 rahmonics(倒谐波)。

倒谱的特性与其说它是频谱之频谱,不如说它是原始

谱的对数变换谱。注意,自相关函数(AA.2.1.1节)是自功率谱的傅立叶反变换,因而也可以认为是“频谱之谱”。实际上当今最常用的倒谱的定义是“对数功率谱的傅立叶反变换”,与自相关函数惟一不同的是其中利用了对数变换。于是,实倒谱可定义如下:

$$(aa.2.8) \quad C_{AA}(\tau) = \mathcal{F}^{-1}(\log G_{AA}(f)),$$

复倒谱定义为:

$$(aa.2.9) \quad C_A(\tau) = \mathcal{F}^{-1}(\log A(f)).$$

图 aa.2.17(参考文献 a.2.9)演示了倒谱优于自相关函数的地方。在对数形式中(图 aa.2.17a)可以看到一族谐波。该谐波族的效应可以从倒谱中(图 aa.2.17c)清楚看出是成序列的,但在自相关函数中(图 aa.2.17b)决非那么明显。

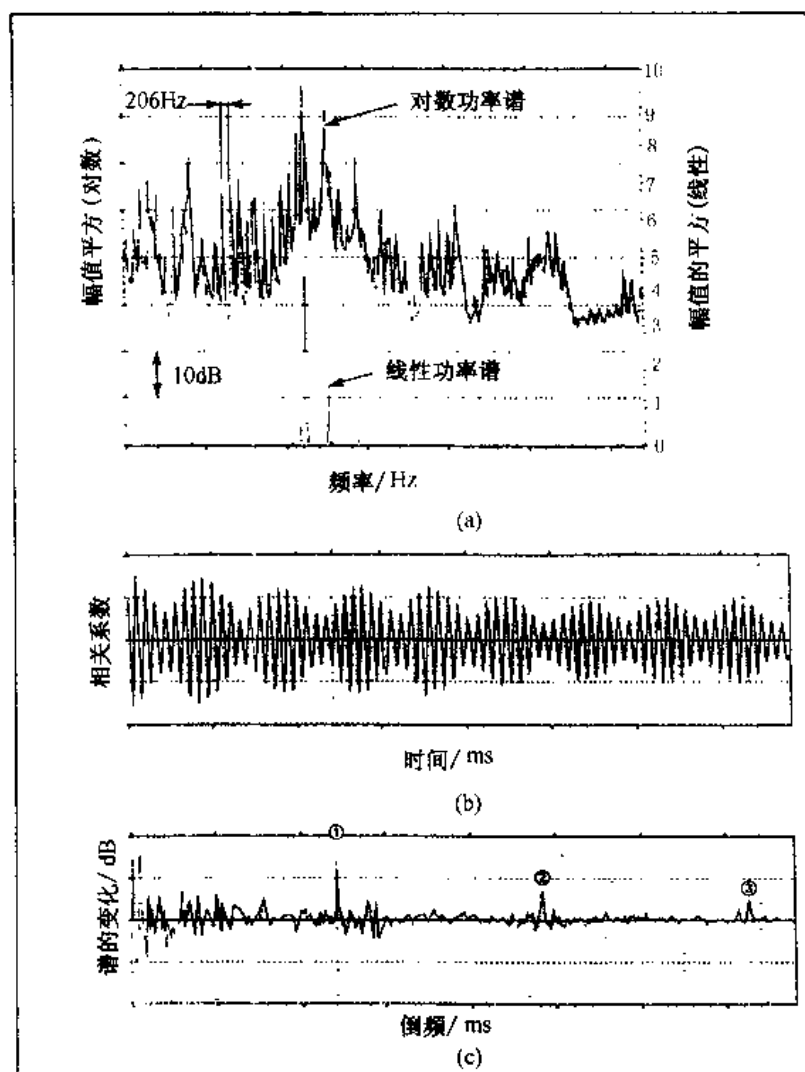


图 aa.2.17 来自具有定位缺陷的滚珠轴承的信号功率谱、自相关函数和倒谱
(a) 功率谱; (b) 自相关; (c) 倒谱

功率倒谱的主要应用之一跟机器故障诊断有关,根据是功率谱能够检测谱中的周期性。例如带有确定缺陷的滚珠轴承的振动信号中就存在这样的周期性(图 aa.2.17)。就图 aa.2.17 的情况而论,已经证明(参考文献 a.2.27),使用倒谱主要有以下三方面好处:

- 检查谐波模式,早期指明缺陷所在,即使基频分量(滚珠通过频率)本不可检测。
- 准确指出谐波间隔,表明为轴速的 4.1 倍,这跟就某个具体轴承的外滚道缺陷计算出来的频率相对应。

- 倒谱主峰值显示出是个优良的趋势参数;因为它代表了大量单个谐波的整体平均,所以谐波中的波动(例如由于载荷变化而引起者)在倒谱中大部分被平均掉了。

在其他一些情况(例如齿轮)下,机器缺陷的另一种指示是振动信号中存在边带(见 AA.2.1.1 节)。倒谱分析同样可以改善这些边带的识别精度。还有一些应用是语音分析、回声检测与消除等。

AA.2.1.4 结 论

本附录所讨论的信号处理函数如自相关、互相关、自功率谱、互功率谱以及倒谱等应用问题,虽然与模态分析没有直接关系,但在振动和噪声分析方面却十分重要。

AA.3.1 最小二乘复指数法举例

本附录中我们举一个用最小二乘复指数法(A.3.4.2 节)进行参数估计的简单例子。考虑一个单入-单出系统。图 aa.3.1 表示该系统的脉冲响应。

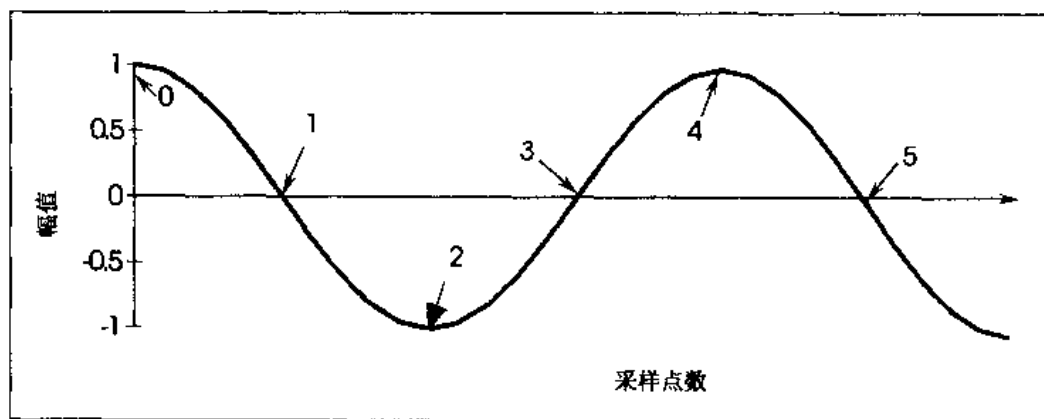


图 aa.3.1 单入-单出系统的脉冲响应函数

采样值为:

n	0	1	2	3	4	5
$h_{11}(\Delta t)$	1	0	-1	0	1	0

假定模态数为 1(即 $N_m = 1$),那么由方程

$$p = \frac{2N_m}{N_i}$$

可得 $p = 2$ (因输入数 $N_i = 1$)。因此一般方程

$$\langle h(n\Delta t) \rangle_o [Y_1] + \langle h((n-1)\Delta t) \rangle_o [W]_1 + \cdots + \langle h((n-p)\Delta t) \rangle_o [W]_p = \langle 0 \rangle$$

在本例中就变成:

$$h(n\Delta t) + h((n-1)\Delta t)w_1 + h((n-2)\Delta t)w_2 = 0.$$

令 n 从 2 变到 5, 便可依次写出下列方程组:

$$h(1\Delta t)w_1 + h(0\Delta t)w_2 = -h(2\Delta t),$$

$$h(2\Delta t)w_1 + h(1\Delta t)w_2 = -h(3\Delta t),$$

$$h(3\Delta t)w_1 + h(2\Delta t)w_2 = -h(4\Delta t),$$

$$h(4\Delta t)w_1 + h(3\Delta t)w_2 = -h(5\Delta t),$$

代入采样值则得:

$$0 \times w_1 + 1 \times w_2 = 1$$

$$-1 \times w_1 + 0 \times w_2 = 0$$

$$0 \times w_1 - 1 \times w_2 = -1$$

$$1 \times w_1 + 0 \times w_2 = 0$$

因为这些样值都是准确数据, 所以无需采用最小二乘估计法; 就本例而言, 未知系数可从前两个方程导出为:

$$w_1 = 0$$

$$w_2 = 1$$

推导系统极点用的一般方程

$$z_r^n \langle L \rangle_r [Y_1] + z_r^{n-1} \langle L \rangle_r [W]_1 + \cdots + z_r^{n-p} \langle L \rangle_r [W]_p = \langle 0 \rangle$$

变为:

$$z^2 + w_1 z + w_2 = 0.$$

代入系数值则得:

$$z^2 + 1 = 0.$$

故

$$z_1 = j, z_2 = -j.$$

因为

$$z_r = e^{\lambda_r \Delta t} = e^{(\sigma_r + j\omega_r)\Delta t} = e^{\sigma_r \Delta t} (\cos(\omega_r \Delta t) + j\sin(\omega_r \Delta t)),$$

所以由 $z_1 = j$ 的实部可得: $\omega_1 = \frac{\pi}{2\Delta t}$ rad/s,

由 $z_1 = j$ 的虚部得: $\sigma_1 = 0$ rad/s。

类似地, 由 $z_2 = -j$ 可以求出: $\omega_2 = -\frac{\pi}{2\Delta t}$ rad/s, $\sigma_2 = 0$ rad/s。

对于 $\Delta t = 0.25$ s, 检测到的频率为 1 Hz。

AA.6.1 模型修正: 模型匹配、相关技术和模型矫正

AA.6.1.0 引言

本附录将用一个简单的例子阐明 A.6.1 节引入的关于模型修正的一些概念。图 aa.6.1 表示一个具有 7 个自由度的质量-弹簧系统。我们之所以选用这个简化了的纯理论结构而不

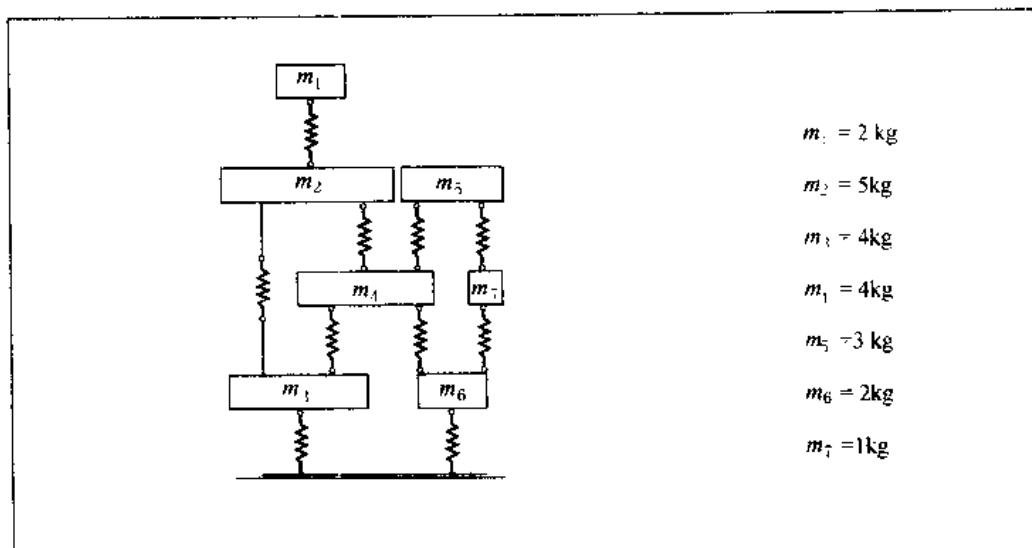


图 aa.6.1 质量-弹簧系统

用实际的结构,是为了将模型修正过程的各个方面隔离出来,进而更清晰地予以评述。

我们来考虑两个模型,一个“解析”的,一个“实验”的。

“实验”模型是从有限元分析得来的一个仿制模型,其中质量和刚度参数如图所示,都是实际值,所有弹簧的刚度均相等,等于 1000 N/m 。本例中不考虑测量噪声和实验结构的阻尼特性。“实验”模态分析得出下面的“实验”共振频率(rad/s)和模态振型(规范化为单位长度):

$$\omega_1^* = 26.18, \omega_2^* = 52.16, \omega_3^* = 77.20, \omega_4^* = 100.00$$

$$\omega_5^* = 103.56, \omega_6^* = 116.10, \omega_7^* = 163.09$$

$$\{\Psi_1^*\} = \begin{Bmatrix} 0.5147 \\ 0.4442 \\ 0.2979 \\ 0.3678 \\ 0.3863 \\ 0.2421 \\ 0.3253 \end{Bmatrix}, \quad \{\Psi_2^*\} = \begin{Bmatrix} 0.5558 \\ 0.2534 \\ 0.0388 \\ -0.1791 \\ -0.5491 \\ -0.2647 \\ -0.4709 \end{Bmatrix}, \quad \{\Psi_3^*\} = \begin{Bmatrix} -0.7087 \\ 0.1360 \\ 0.5244 \\ 0.1871 \\ -0.3205 \\ -0.0376 \\ -0.2551 \end{Bmatrix}$$

$$\{\Psi_4^*\} = \begin{Bmatrix} 0.5774 \\ -0.5774 \\ 0.5774 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \{\Psi_5^*\} = \begin{Bmatrix} -0.1036 \\ 0.1187 \\ 0.2001 \\ -0.3786 \\ 0.4952 \\ -0.7049 \\ -0.2260 \end{Bmatrix}, \quad \{\Psi_6^*\} = \begin{Bmatrix} -0.0637 \\ 0.1080 \\ 0.1669 \\ -0.5072 \\ -0.0753 \\ 0.5064 \\ 0.6611 \end{Bmatrix}, \quad \{\Psi_7^*\} = \begin{Bmatrix} -0.0018 \\ 0.0080 \\ 0.0109 \\ -0.0910 \\ 0.1636 \\ 0.4217 \\ -0.8871 \end{Bmatrix}$$

为了解释与压缩及扩展技术有关的某些概念,有些例子将只考虑一组有限量的实验自由度和模态。压缩后的自由度包括 m_2, m_3, m_4, m_5 , 模态为 1, 2, 3。

同时我们导出了该结构的一个“解析”模型。实验模型和解析模型之间的差别如图 aa.6.2 所述。

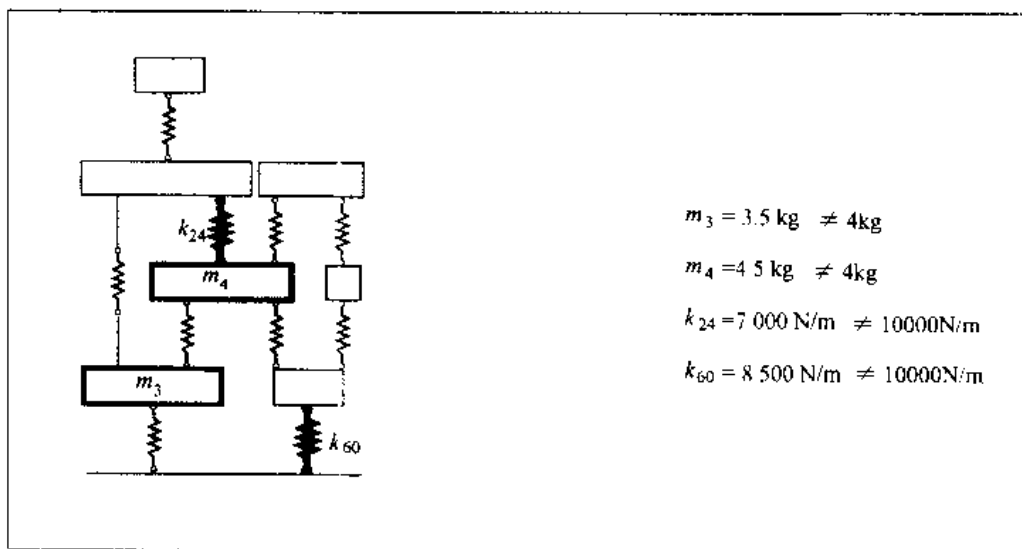


图 aa.6.2 “解析”模型

该“解析”模型的系统矩阵和模态参数是:

$$[M] = \begin{bmatrix} 2 & & & & & \\ & 5 & & & & 0 \\ & & 3.5 & & & \\ & & & 4.5 & & \\ & & & & 3 & \\ 0 & & & & & 2 \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix},$$

$$[K] = 1000 \times \begin{bmatrix} 1 & -1 & & & & & \\ -1 & 2.7 & -1 & -0.7 & & & 0 \\ & -1 & 3 & -1 & & & \\ & -0.7 & -1 & 3.7 & -1 & -1 & \\ & & & -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & & & -1 & 0 & 2.85 & -1 \\ & & & & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\omega_1^a = 25.38, \omega_2^a = 48.76, \omega_3^a = 78.70, \omega_4^a = 97.39,$$

$$\omega_5^a = 103.27, \omega_6^a = 111.53, \omega_7^a = 162.20 \text{ (单位均为 rad/s)},$$

$$\begin{aligned} \{\Psi_1^a\} &= \begin{Bmatrix} 0.5105 \\ 0.4448 \\ 0.2918 \\ 0.3648 \\ 0.3851 \\ 0.2557 \\ 0.3311 \end{Bmatrix}, \{\Psi_2^a\} = \begin{Bmatrix} 0.5551 \\ 0.2912 \\ 0.0353 \\ -0.2147 \\ -0.5213 \\ -0.2825 \\ -0.4562 \end{Bmatrix}, \{\Psi_3^a\} = \begin{Bmatrix} -0.7011 \\ 0.1673 \\ 0.4750 \\ 0.2280 \\ -0.3529 \\ -0.0311 \\ -0.2781 \end{Bmatrix}, \{\Psi_4^a\} = \begin{Bmatrix} 0.5101 \\ -0.4575 \\ 0.1339 \\ 0.4147 \\ -0.4352 \\ 0.3860 \\ -0.0468 \end{Bmatrix}, \\ \{\Psi_5^a\} &= \begin{Bmatrix} 0.2434 \\ -0.2758 \\ 0.5949 \\ -0.1602 \\ 0.3351 \\ -0.5607 \\ -0.2417 \end{Bmatrix}, \{\Psi_6^a\} = \begin{Bmatrix} 0.0050 \\ -0.0075 \\ 0.3036 \\ -0.4034 \\ -0.1236 \\ 0.5905 \\ 0.6174 \end{Bmatrix}, \{\Psi_7^a\} = \begin{Bmatrix} -0.0009 \\ 0.0038 \\ 0.0109 \\ -0.0713 \\ 0.1645 \\ 0.4019 \\ -0.8979 \end{Bmatrix}. \end{aligned}$$

振型已换算为单位长度。

我们将用上述简单的 7 自由度系统来阐述前几节所提出的一些概念。

AA.6.1.1 模型匹配

对于引言中提出的 7 自由度系统,只“测”出了前 3 阶实验模态振型,有效自由度组由 m_2 、 m_3 、 m_4 、 m_5 组成。

为了简单评估一下压缩技术,我们根据由不同的压缩技术得到的压缩系统矩阵来计算频响函数,其中自由度 5 施力、自由度 2 响应。然后将压缩系统的这些频响函数跟完整系统对应的频响函数在感兴趣的频率范围内加以比较。图 aa.6.3a,图 aa.6.3b 和图 aa.6.3c 表示分别按动态压缩法($\omega_r = 50 \text{ rad/s}$)、SEREP 法(用到 4 个解析模态)和 IRS 法(10 次叠代)所得到的频响函数重叠在一起的情形。

动态压缩法只能对压缩频率附近的频率给出可以接受的结果。SEREP 法的着眼点就是共振频率,但在共振频率之间所给结果仅仅是完整系统频响函数的一阶近似。IRS 法所得结果比较好。

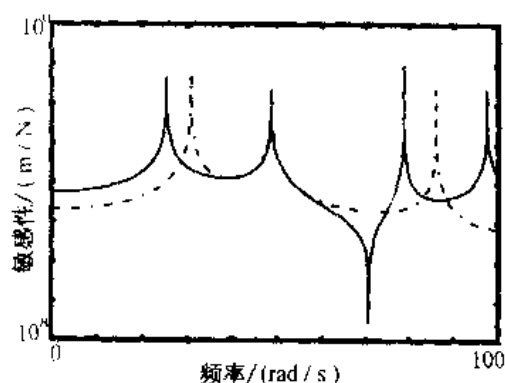


图 aa.6.3a 典型的完整系统频响函数(实线)和动态压缩系统对应的频响函数(虚线)

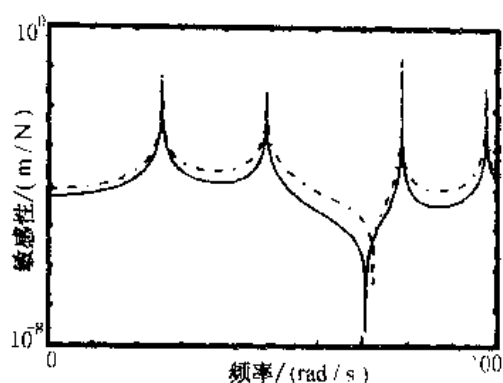


图 aa.6.3b 完整系统频响函数(实线)和 SEREP 压缩系统对应频响函数(虚线)

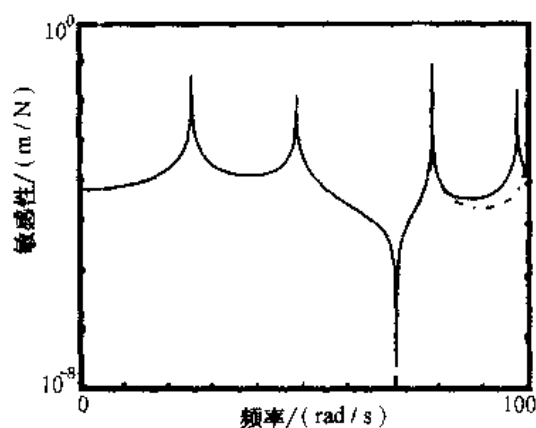


图 aa.6.3c 完整系统频响函数(实线)和 IRS 压缩系统对应频响函数(虚线)

为了评估各种扩展技术,要用不同的扩展方法对实验模态振型进行扩展。扩展模态振型与原本完全实验模态振型之间的 MAC 值反映了扩展模态振型质量的好坏(MAC 值是两个振型之间的相关系数。MAC = 1 表示二振型相同;MAC = 0 表明两个振型完全不同。见 A.6.1.3.4 节)。用各种扩展方法所得到的前三阶模态振型与原来完全实验模态振型之间的 MAC 值,列在下面:

$$\begin{aligned} \text{MAC}^{\text{dyn}} &= \begin{Bmatrix} 0.9411 \\ 0.9979 \\ 0.1506 \end{Bmatrix} & \text{MAC}^{\text{seep}} &= \begin{Bmatrix} 0.9991 \\ 0.9930 \\ 0.9973 \end{Bmatrix} & \text{MAC}^{\text{irs}} &= \begin{Bmatrix} 0.9995 \\ 0.9930 \\ 0.9973 \end{Bmatrix} \\ \text{MAC}^{\text{eig-mix}} &= \begin{Bmatrix} 0.9997 \\ 0.9994 \\ 0.9994 \end{Bmatrix} & \text{MAC}^{\text{mo-co}} &= \begin{Bmatrix} 0.9991 \\ 0.9923 \\ 0.9101 \end{Bmatrix} & \text{MAC}^{\text{mac}} &= \begin{Bmatrix} 0.9554 \\ 0.7926 \\ 0.8061 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

如果将 MAC = 0.9 取为判断扩展良好的界限,那么大多数方法都能给出好的结果。因为前三阶解析模态显示出与实验模态良好的相关性,所以前三阶解析模态可作为实验模态振型扩展的一个良好基础。只有动态扩展法和 MAC 扩展法所得结果比较差。

AA.6.1.2 相关技术

对于上面的 7 自由度例结构,运用相关技术可得如下结果:

$$\bullet \quad \{\Delta\omega_r/\omega_r^x\} = \begin{Bmatrix} -3.05\% \\ -6.52\% \\ 1.94\% \\ -2.61\% \\ -0.27\% \\ -3.94\% \\ -0.55\% \end{Bmatrix}$$

• 45°图;图 aa.6.4a 至图 aa.6.4g.

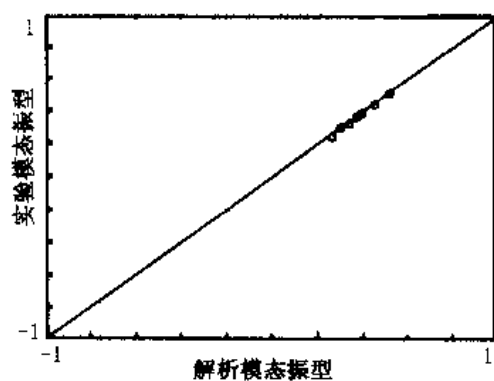


图 aa.6.4a 模态 1 的 45°图,全套自由度

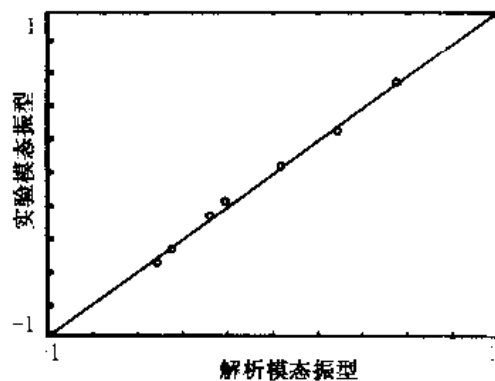


图 aa.6.4b 模态 2 的 45°图,全套自由度

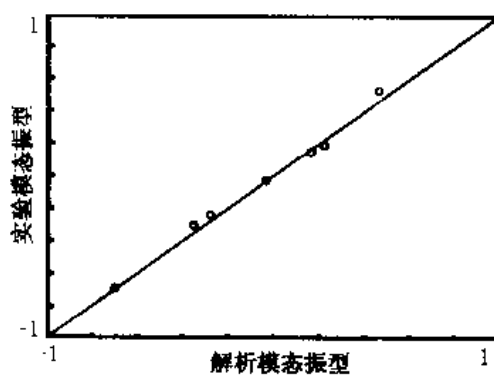


图 aa.6.4c 模态 3 的 45°图,全套自由度

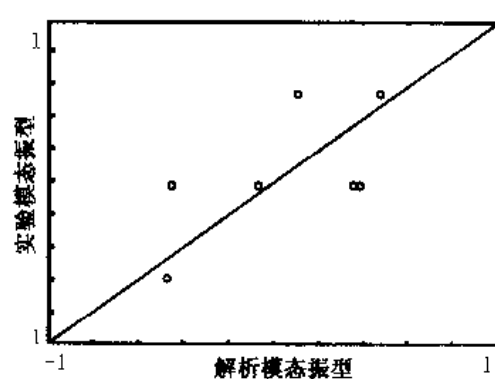


图 aa.6.4d 模态 4 的 45°图,全套自由度

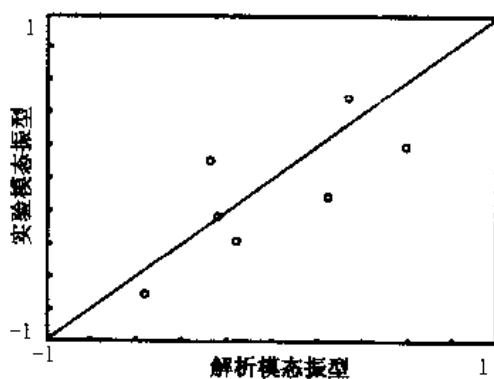


图 aa.6.4e 模态 5 的 45°图,全套自由度

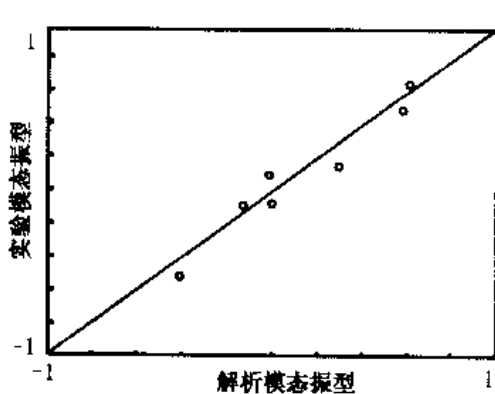


图 aa.6.4f 模态 6 的 45°图,全套自由度

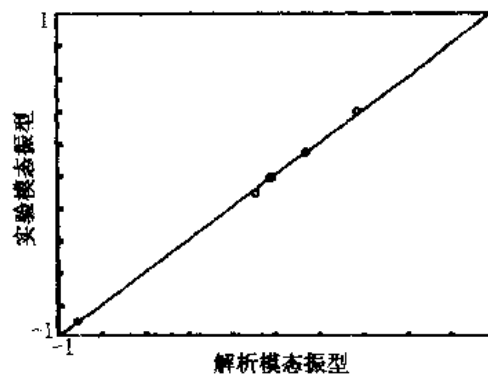


图 aa.6.4g 模态 7 的 45°图,全套自由度

$$MAC^{a-s} = \begin{bmatrix} 1.00 & 0.01 & 0.09 & 0.04 & 0.02 & 0.04 & 0.02 \\ 0.01 & 1.00 & 0.01 & 0.03 & 0.01 & 0.09 & 0.05 \\ 0.09 & 0.00 & 0.99 & 0.05 & 0.00 & 0.02 & 0.03 \\ 0.02 & 0.07 & 0.02 & 0.40 & 0.51 & 0.00 & 0.01 \\ 0.00 & 0.04 & 0.00 & 0.41 & 0.54 & 0.11 & 0.00 \\ 0.06 & 0.09 & 0.00 & 0.03 & 0.16 & 0.94 & 0.08 \\ 0.02 & 0.06 & 0.02 & 0.00 & 0.00 & 0.13 & 1.00 \end{bmatrix}$$

$$\bullet \text{ COMAC} = \begin{Bmatrix} 0.91 \\ 0.72 \\ 0.57 \\ 0.65 \\ 0.76 \\ 0.84 \\ 1.00 \end{Bmatrix}$$

- 频响函数比较:图 aa.6.5.

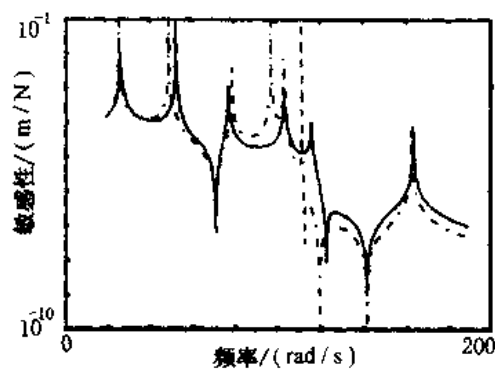


图 aa.6.5 典型的实验频响函数和对应的解析频响函数

$$\bullet \text{ COM}^{a-x} = \begin{bmatrix} 3.10 & -0.05 & -0.05 & -0.10 & -0.12 & -0.10 & -0.01 \\ 0.01 & 2.38 & -0.07 & -0.13 & 0.17 & 0.13 & 0.01 \\ 0.01 & 0.04 & 2.58 & -0.33 & -0.23 & -0.20 & -0.02 \\ 0.00 & 0.21 & -0.04 & 2.18 & -2.17 & -0.72 & -0.03 \\ 0.03 & -0.01 & 0.21 & 2.27 & 1.81 & -0.27 & -0.02 \\ -0.02 & -0.04 & 0.12 & 0.64 & -0.26 & 2.13 & 0.07 \\ -0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.01 & 0.01 & -0.05 & 1.25 \end{bmatrix}$$

$$\bullet \text{ COK}^{a-x} = 10^4 \times \begin{bmatrix} 0.20 & -0.00 & -0.00 & -0.01 & -0.01 & -0.01 & -0.00 \\ 0.00 & 0.57 & -0.02 & -0.03 & 0.04 & 0.03 & 0.00 \\ 0.01 & 0.03 & 1.60 & -0.21 & -0.14 & -0.12 & -0.01 \\ 0.00 & 0.20 & -0.04 & 2.07 & -2.05 & -0.68 & -0.03 \\ 0.03 & -0.01 & 0.22 & 2.43 & 1.94 & -0.29 & -0.02 \\ -0.02 & -0.05 & 0.15 & 0.80 & -0.33 & 2.65 & 0.08 \\ -0.02 & 0.01 & 0.01 & 0.03 & 0.03 & -0.14 & 3.28 \end{bmatrix}$$

$$\bullet \text{ MOM} = \begin{bmatrix} 3.11 & -0.04 & -0.04 & -0.09 & -0.10 & -0.12 & -0.02 \\ -0.04 & 2.35 & -0.03 & -0.01 & 0.03 & 0.04 & 0.01 \\ -0.04 & -0.03 & 2.59 & -0.15 & -0.09 & -0.09 & -0.01 \\ -0.09 & -0.01 & -0.15 & 3.50 & -0.06 & -0.05 & 0.00 \\ -0.10 & 0.03 & -0.09 & -0.06 & 2.65 & 0.08 & 0.02 \\ -0.12 & 0.04 & -0.09 & -0.05 & 0.08 & 2.29 & 0.02 \\ -0.02 & 0.01 & -0.01 & -0.00 & 0.02 & 0.02 & 1.26 \end{bmatrix}$$

$$\bullet \text{ MOK} = 10^4 \times \begin{bmatrix} 0.20 & -0.00 & 0.00 & 0.01 & 0.01 & -0.03 & -0.02 \\ -0.00 & 0.57 & 0.01 & 0.07 & -0.09 & -0.06 & 0.00 \\ 0.00 & 0.01 & 1.62 & -0.01 & 0.00 & 0.01 & 0.00 \\ 0.01 & 0.07 & -0.01 & 3.57 & 0.09 & 0.11 & 0.02 \\ 0.01 & -0.09 & 0.00 & 0.09 & 2.64 & -0.04 & 0.03 \\ -0.03 & -0.06 & 0.01 & 0.11 & -0.04 & 2.78 & -0.05 \\ -0.02 & 0.00 & 0.00 & 0.02 & 0.03 & -0.05 & 3.31 \end{bmatrix}$$

$$\bullet m^a = m^x.$$

解析模型的整体质量相当好,频率差别也不太大;模态 2 频率差最大,为 6.52%。MAC 值、45°曲线图和正交性都表明,两种模型的模态 4 之间和模态 5 之间相关性很差。自由度 m_2, m_3, m_4 和 m_5 的 COMAC 值很小。结果可见,解析模型和实验模型之间的相关性不好,因而需要对解析模型进行矫正。

上面的相关性研究是用全部自由度和模态来进行的。如果只用压缩自由度组(m_2, m_3, m_4 和 m_5)和压缩模态(模态 1,2,3,)时,相关性多少有些不同:

- $\{\Delta\omega_r/\omega_r^*\} = \begin{Bmatrix} -3.05\% \\ -6.52\% \\ 1.94\% \end{Bmatrix}$.

- 45°曲线图:图 aa.6.6a 至图 aa.6.6c.

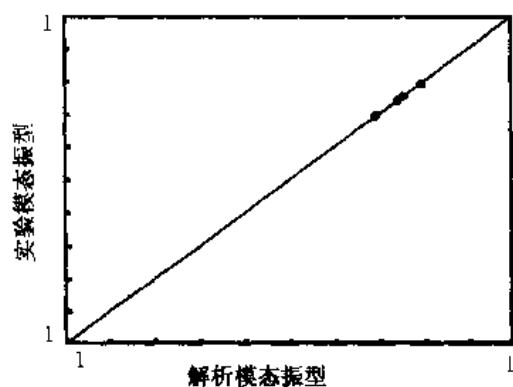


图 aa.6.6a 模态 1 的 45°曲线图;有效自由度

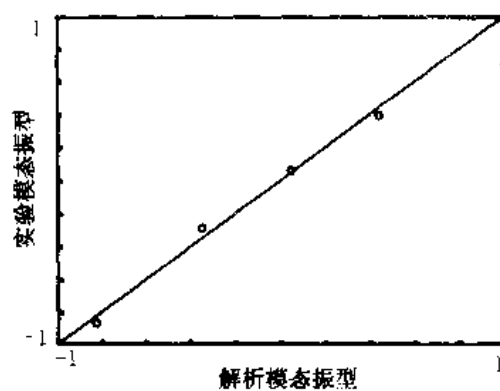


图 aa.6.6b 模态 2 的 45°曲线图;有效自由度

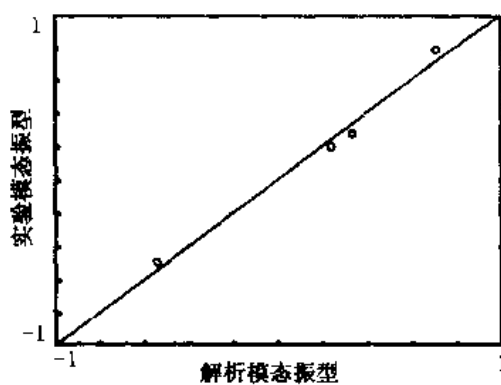


图 aa.6.6c 模态 3 的 45°曲线图;有效自由度

- $MAC^{a-x} = \begin{bmatrix} 1.00 & 0.10 & 0.10 \\ 0.09 & 0.99 & 0.20 \\ 0.11 & 0.27 & 0.99 \\ 0.10 & 0.01 & 0.20 \\ 0.05 & 0.18 & 0.08 \\ 0.08 & 0.21 & 0.13 \\ 0.10 & 0.45 & 0.26 \end{bmatrix}$.

- $COMAC = \begin{bmatrix} 0.99 \\ 1.00 \\ 0.99 \\ 1.00 \end{bmatrix}$.

$$\bullet \text{ COM}^{a-x} = \begin{bmatrix} 3.06 & 0.06 & -0.84 \\ -0.03 & 2.47 & -0.66 \\ 0.04 & -0.08 & 3.46 \\ -0.02 & 0.36 & -0.83 \\ -5.63 & -6.54 & 14.04 \\ -6.22 & -4.22 & 12.89 \\ -2.40 & -3.78 & 6.02 \end{bmatrix}.$$

$$\bullet \text{ COK}^{a-x} = 10^4 \times \begin{bmatrix} 0.20 & 0.00 & -0.05 \\ -0.01 & 0.59 & -0.16 \\ 0.03 & -0.05 & 2.14 \\ -0.02 & 0.35 & -0.79 \\ -0.26 & -2.09 & 7.75 \\ -0.30 & -1.57 & 7.23 \\ -0.10 & -1.29 & 3.42 \end{bmatrix}.$$

$$\bullet \text{ MOM}^{a-x} = \begin{bmatrix} 3.03 & 0.02 & -0.76 \\ 0.02 & 2.54 & -0.87 \\ -0.76 & -0.87 & 5.21 \end{bmatrix}.$$

$$\bullet \text{ MOK}^{a-x} = 10^4 \times \begin{bmatrix} 0.20 & -0.01 & -0.01 \\ -0.01 & 0.63 & -0.31 \\ -0.01 & -0.31 & 3.10 \end{bmatrix}.$$

- 整体质量和频响函数不受有限实验数据的影响。

因为只采用了表现出良好的相关性的前三阶模态,所以它们的 MAC 值和 COMAC 值几乎是完美无缺的。为了计算正交性,我们用前四阶解析模态按 SEREP 压缩技术对系统矩阵进行了压缩。结果,对于混合正交性中其他解析模态,它们的非对角线元素的值大到了不恰当的程度。其余的非对角线元素的值处在可以接受的范围之内。

就全套自由度和全部模态简单加以比较就会发现,使用的模态数不同、压缩或扩展方法不同,MAC 值、COMAC 值都会受到影响,正交性受到的影响则更为严重。因此,对相关结果的解释必须时刻小心,并且一定不要忘记实验模态测量网点不一致性和不完整性所可能造成的影响。

AA.6.1.3 修正参数的选择

误差定位法应用于上述 7 自由度例结构可得如下结果:

$$\bullet \text{ COMAC} = \begin{bmatrix} 0.91 \\ 0.72 \\ 0.57 \\ 0.65 \\ 0.76 \\ 0.84 \\ 1.00 \end{bmatrix}.$$

$$\bullet [\Delta M]_{\text{EMM}} = \begin{bmatrix} 0 & & & & & & \\ & 0 & & & & & \\ & & 0.44 & & & & \\ & & & -0.56 & & & \\ & & & & 0 & & \\ & 0 & & & & 0 & \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\bullet [\Delta K]_{\text{EMM}} = 10^3 \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2.43 & 0 & -2.43 & 0 & 0.04 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2.43 & 0 & 2.43 & 0 & -0.04 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.04 & 0 & -0.04 & 0 & 1.34 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\bullet [\cdots | F | \cdots] = 10^3 \times \begin{bmatrix} 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ -0.23 & -1.30 & 0.15 & 1.73 & -1.49 & -1.85 & -0.30 \\ 0.10 & 0.05 & 1.56 & 2.89 & 1.07 & 1.12 & 0.14 \\ 0.10 & 1.54 & -0.71 & -1.73 & 3.51 & 5.26 & 1.51 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ -0.36 & 0.40 & 0.06 & 0.00 & 1.06 & -0.76 & -0.63 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \end{bmatrix}.$$

COMAC 值表明,自由度 m_1 和 m_7 大概是正确的($\text{COMAC} > 0.9$),而其他自由度中可能有一些误差。质量误差矩阵清楚显示了解析模型中的质量误差(m_3 和 m_4),刚度误差矩阵显示出了刚度误差(m_2 、 m_4 、 m_6 之间的刚度)。力平衡法则指出了自由度 m_2 、 m_3 、 m_4 和 m_6 的不平衡。

可见,力平衡法和误差矩阵法可以指示解析模型中的不准确性,而 COMAC 值却不能清晰指明解析模型中存在的准确性。

当我们只考虑压缩系统时(4 个自由度,3 个模态),这两种方法都不能对(用 SEREP 扩展法得到的)解析模型中的不准确性给出满意的指示:

$$\bullet \text{ COMAC} = \begin{Bmatrix} 0.99 \\ 1.00 \\ 0.99 \\ 1.00 \end{Bmatrix}.$$

$$\bullet [\Delta M]_{\text{EMM}} = \begin{bmatrix} -0.12 & -1.05 & 0.34 & 0.16 & 0.07 & -0.03 & -0.01 \\ -1.05 & 2.69 & -1.03 & -0.92 & 0.07 & -0.11 & 0.01 \\ 0.34 & -1.03 & 2.64 & -0.72 & -0.03 & -0.07 & 0.00 \\ 0.16 & -0.92 & -0.72 & 3.29 & -1.03 & -0.39 & -0.28 \\ 0.07 & 0.07 & -0.03 & -1.03 & 1.30 & -0.55 & -0.47 \\ -0.03 & -0.11 & -0.07 & -0.39 & -0.55 & 1.81 & -0.15 \\ -0.01 & 0.01 & 0.00 & -0.28 & -0.47 & -0.15 & 0.87 \end{bmatrix}.$$

$$\bullet [\Delta K]_{\text{EMM}} = 10^4 \times \begin{bmatrix} 0.17 & -0.65 & 0.44 & 0.18 & 0.08 & -0.06 & -0.02 \\ -0.56 & 2.24 & -1.43 & -0.90 & 0.15 & 0.05 & 0.06 \\ 0.44 & -1.43 & 2.57 & 1.18 & 0.16 & 0.06 & 0.06 \\ 0.18 & -0.90 & -1.18 & 3.59 & -1.05 & -1.00 & 0.00 \\ 0.08 & 0.15 & 0.16 & -1.02 & 1.56 & -0.07 & -1.11 \\ -0.06 & 0.05 & 0.06 & -1.00 & -0.07 & 2.83 & -1.02 \\ -0.02 & 0.06 & 0.06 & 0.00 & -1.11 & -1.02 & 1.97 \end{bmatrix}.$$

$$\bullet [\{F\}_1 \quad \{F\}_2 \quad \{F\}_3] = 10^3 \times \begin{bmatrix} -0.24 & 0.47 & 0.78 \\ 0.07 & -2.30 & 4.51 \\ 0.08 & 0.10 & 1.10 \\ -0.05 & 1.51 & 0.04 \\ -0.05 & -0.36 & 0.64 \\ -0.05 & 0.73 & -0.34 \\ -0.03 & 0.13 & -0.01 \end{bmatrix}.$$

AA.6.1.4 矫正方法

本例考虑两种情形。

首先,通过一组最佳修正参数对共振频率残余进行最小化,用以灵敏度为基础的迭代法对7自由度例结构进行修正。然后根据压缩实验数据组(4个自由度,3个模态)对这同一个模型进行修正。选择一组修正参数,使之不含有限元模型的所有误差,那么建立在灵敏度基础上的迭代法可以使共振频率残余、频响函数残余以及参数变化量减至最小。

对于第一种情形,有:

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} m_3 \\ m_4 \\ k_{24} \\ k_{60} \end{Bmatrix} \quad (\text{见图 aa.6.7}),$$

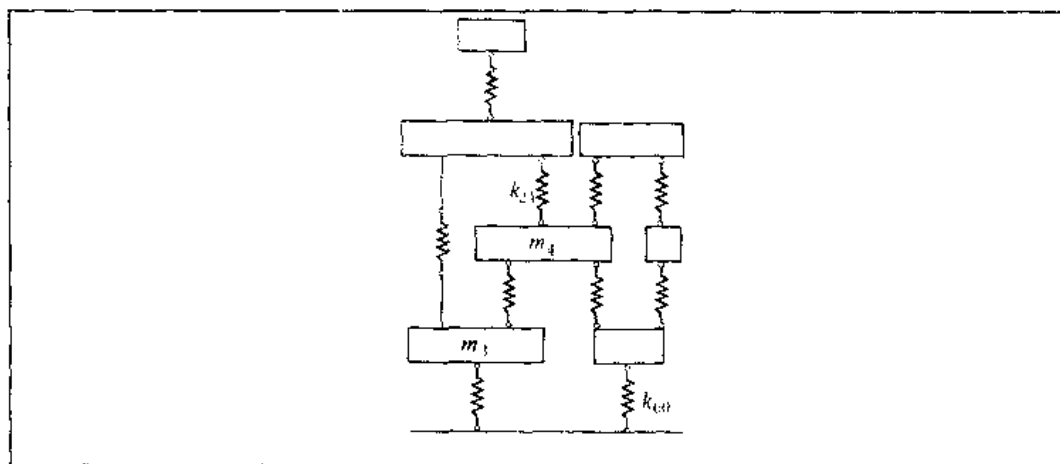


图 aa.6.7 修正参数;情形 1

$$\{\epsilon\} = \{\epsilon_{\omega_r}\}, \quad r = 1, 2, \dots, 7.$$

图 aa.6.8 和图 aa.6.9 表示 $\{\epsilon\}$ 和 $\{u\}$ 的收敛情况。 $\{u\}$ 收敛于实际结构中 m_3, m_4, k_{24} 和 k_{60} 的准确值。4 次迭代之后,修正模型就相当好了。

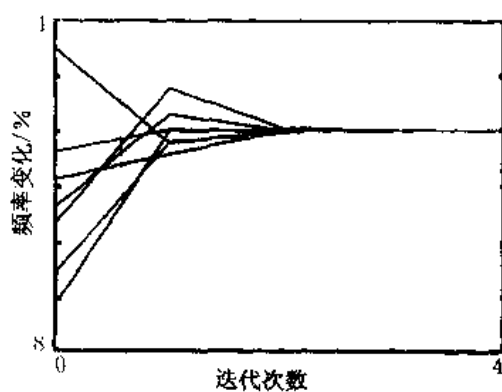


图 aa.6.8 $\{\epsilon\}$ 的收敛情形

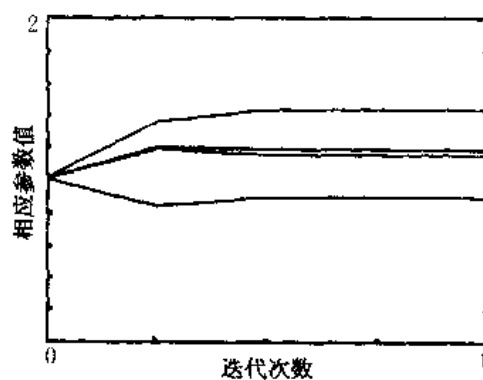


图 aa.6.9 $\{u\}$ 的收敛情形

对于第二种情形,实验数据组被限制为 4 个自由度 (m_2, m_3, m_4, m_5) 和 3 个模态。修正参数组及残余向量构成如下:

$$\{u\} = \{k_i\} \quad (\text{对所有的 } i),$$

$$\{\epsilon\} = \left\{ \begin{array}{l} \{\epsilon_{\omega_r}\} \\ \{\epsilon_{H_j}\} \\ \{\epsilon_{\mu}\} \end{array} \right\}.$$

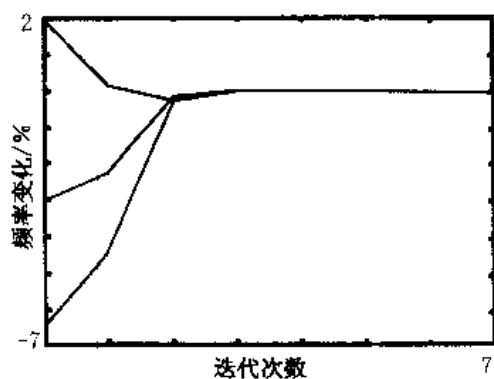


图 aa.6.10 $|\epsilon_{\omega}|$ 的收敛情况

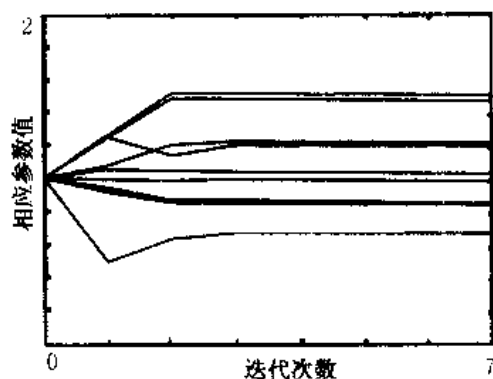


图 aa.6.11 $|u|$ 的收敛情况

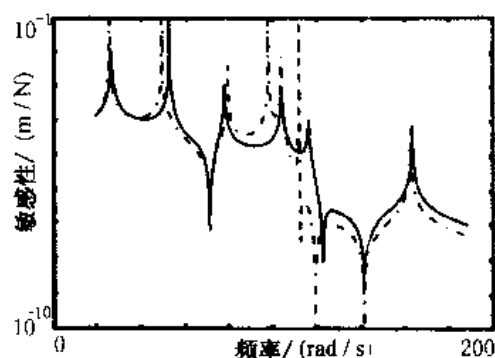


图 aa.6.12 实验频响函数与修正前的
对应解析频响函数

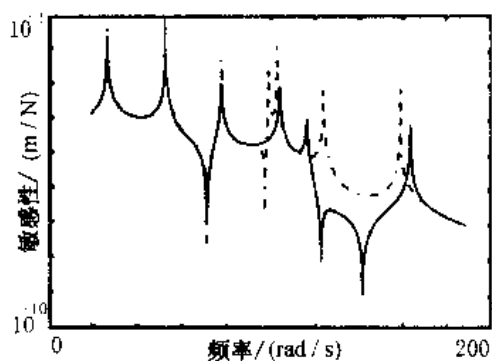


图 aa.6.13 实验频响函数与修正后的
对应解析频响函数

对于 $|\epsilon_{\omega}|$, 只知道 3 个实验共振频率, 而对于 $\{\epsilon_H\}$, 却选了 6 个修正频率:

$$\{\omega_j\} = \begin{Bmatrix} 20 \\ 30 \\ 45 \\ 55 \\ 70 \\ 80 \end{Bmatrix} \text{ rad/s.}$$

解析系统矩阵的压缩是通过每个频率上的动态压缩而实现的。图 aa.6.10 和图 aa.6.11 表示 $|\epsilon_{\omega}|$ 和 $|u|$ 的收敛状况。图 aa.6.12 和图 aa.6.13 表示典型的实验频响函数和修前后相应的解析频响函数。

修正后的解析模型能够在修正过程中所论频率范围内 (20 ~ 80 rad/s) 很好地描述结构的动态特性。

BB.1.3 结构几何模型生成软件

提供了快速而灵活的方法来建立结构的三维线架模型。此线架模型主要用于声强分析的声场分布显示,模态分析的结构动画显示,和实际工作条件下的测量结果分析,如 ODS 分析和工作模态分析等。

几何模型的生成方法有:表格编辑输入方式、屏幕人机对话方式、根据有限元模型进行压缩处理(选项)、使用三维坐标仪测量等。

结构几何模型由若干部件、节点和连线构成。部件的多少、部件中节点的多少,是有限制的。主节点(测量节点)之间插入一些“从节点”,使得线架模型在动画时显得更光滑,更接近实际。模型的部件、节点和连线可以在屏幕上进行交互式的灵活编辑和修改处理。

对于形状比较规则的部件(矩形、立方体、柱形、球形等),利用自动网格生成器可以迅速建立其模型。

整个模型可采用直角坐标系、柱坐标系或球坐标系。每个部件可有其局部坐标系,局部坐标系也可以选择直角坐标系、柱坐标系或球坐标系。最后,部件的节点也可以有它自己的坐标系,测量方向允许跟整体或局部坐标轴方向不一致,这对于曲面的测量是非常有用的,否则,就必须给三轴向传感器加上楔形座,才能与三个正交坐标轴相一致。

BB.1.4 CADA - X 模态试验软件

在 LMS CADA - X 系统中,提供了全套的模态试验方法,包括:

- ① 锤激模态试验;
- ② MIMO 随机激励模态试验;
- ③ MIMO 步进正弦模态试验;
- ④ MIMO 正弦纯模态试验。

这些模态试验软件的共同特点:

- ① 多通道信号并行采集;
- ② 控制多通道信号源输出;
- ③ 输入信号调制:自动增益/放大,抗混模拟滤波和数字滤波,各种测量传感器信号调制输入;
- ④ 多通道示波器功能,测量前在时域和频域中检查各通道信号是否正常;
- ⑤ 实时在线显示功能:交互式窗口数目没有限制,每个窗口显示 6 条曲线;以及纯模态调谐过程中的结构模态动画显示;
- ⑥ 多达 3 200 条 FFT 谱线;
- ⑦ 每通道分析频率范围:大于 20 kHz;
- ⑧ 多种在线/后处理测量函数库(时域/频域/幅值域分析)。

前三种模态试验的结果都是先得到结构的多输入多输出 FRF 矩阵,然后再进行模态参数识别。MIMO 激励模态试验,可以使用随机和猝发随机激励信号,用于大型复杂的结构,激振器可以多至 8 个或更多。MIMO 步进正弦试验的步长可以调整,多次平均得到 FRF 矩阵,通过调整力幅大小可以精确地研究结构的非线性动态特性。

模态振型可实可复。

(2) 复模态指示函数(CMIF)方法

CMIF 是一种快速而有效的曲线拟合方法,它是以复模态指示函数为根据的。其主要优点是操作的高度自动化,几乎不需要用户的参预,可以迅速观察所有模态,从而使你能够确定测量中的异常现象(如错误标记、连接不良等),进一步再做更为详细的多自由度分析。在许多情况下,这种方法给出的估计无需再进一步改进了。

此种方法可用于处理单参考点数据或多参考点数据。对于后者,可就每一个参考自由度估计模态参预因子,可以识别重根模态或耦合紧密的模态。

模态振型可实可复。

(3) 时域多自由度方法

这种识别方法是最小二乘复指数(LSCE)曲线拟合法和最小二乘频域(LSFD)法。前者用以估计极点(频率和阻尼),后者用以估计振型。LSCE 法是根据实际测量的频响函数,在选定的频率范围内对脉冲响应函数进行识别运算。事实上这种方法已经被视为准确而可靠模态分析的工业标准方法。这种快速算法具有高度的数字稳定性,特别适合于宽带分析。

同复模态指示函数法一样,此种方法也可用于处理单参考点数据或多参考点数据。对于后者,可就每一个参考自由度估计模态参预因子,可以识别重根模态或耦合紧密的模态。

模态振型同样可实可复。

为了将物理模态和计算模态区别开来,除了一般的工具之外,还可以利用最小二乘误差图和稳态图来判断。事先不必选择模型的大小,因为物理极点可以从稳态图上选取;在稳态图中,极点的稳定性是随模型之大小而变的,一目了然。用鼠标点击“s”(稳定)处的极点,有关模态参数值便输入进了模态表。

(4) 频域多自由度方法

亦即频域直接参数识别(FDPI)曲线拟合法,用以估计极点(频率、阻尼、参预因子)。至于模态振型估计,既可再用 FDPI 方法,亦可选用最小二乘频域法。正如其名称所指,FDPI 法是在频域工作的,不需要进行 FFT 反变换。它特别适合于细化带宽分析,适合于模态阻尼比较大的结构,而且对于估计纯模态(即无阻尼系统的实模态)已经证明是超级技术,特别适合于有限元纯模态的比较分析。

这种方法既可处理单参考点数据,也可处理多参考点数据。对于后者,可就每一个参考自由度估计模态参预因子,可以识别重根模态或耦合紧密的模态。

模态振型可实可复。

和时域多自由度方法一样,稳态图和奇异值图可资利用。选择极点可以在稳态图上进行,同时还有其他一些优点:一个极点选定后,相应的模态振型立即自动地在动画显示窗上动起来。

BB.1.5.3 模态模型验证

有一组完善的验证工具,既可在模态参数估计过程中将物理模态与计算模态区别开来,也可对估计出来的模态参数质量和可靠性予以评估。

(1) 频响函数之和

在识别过程中把用到的全部频响函数求和,可以更明显地指示存在的共振频率。

(2) 模态指示函数

该函数指出存在的共振频率。如果进行的是多参考点测量,那么数目与参考点数相同的“高阶”模态指示函数(MIF)图会被计算出来,使用所谓“多变量模态指示函数”很容易检测重根模态或紧密耦合模态。模态指示函数是根据模态参数识别过程中所用到的全部频响函数计算出来的;在非共振频率处,它的值接近于1,而在共振频率处,其值降为0。

(3) 稳态图

除模态指示函数、最小二乘误差图(LSCE法)、奇异值分解图(FDPI法)等函数之外,还有稳态图。稳态图是一种独特的、强有力的工具,可帮助你鉴别物理模态与计算模态,识别紧密耦合模态甚至重根模态。各种函数(MIF、FRF之和等)可以重叠显示在稳态图上,以便帮助你
对稳态图加以解释。

(4) 模态比例因子

这是两个向量之间的比例换算因子,用以比较不同方法的识别结果。

(5) 模态置信准则(MAC)

这是两个模态振型之间的几何相关性的指示函数,用以评估识别的质量(如两个模态是否成功地分开了),比较各种不同方法的识别结果,或验证所选的测量自由度是否合适。

(6) 模态参预、模态复杂性和模态共线性

模态参预指明了每一阶模态和/或每一个输入的贡献。它用来检测计算模态,为各模态的贡献排队,就每一阶模态评估所选的参考点。

模态复杂性函数就每一阶模态计算并衡量频率对每个响应点质量改变的灵敏度。它可以指出测量方向的错误输入,指出识别糟糕的模态,特别能够表示是否需要
进行结构修改。

模态共线性和模态相位偏移表示模态“实”的成分有多大,在检查局部阻尼或错误估计时很有用。

(7) 频响函数互易性和频响函数综合

用以检查参数识别中所用数据的互易性。可以在线,也可以离线进行频响函数综合计算。在频响函数综合计算中要考虑的模态是可选的。

(8) 其他验证工具

如广义模态参数,刚体模态分析,模态分解等。

BB.1.5.4 模态结果显示

(1) 动画显示方式

动画显示可以是连续式的或步进式的,可以是瞬时的或“所有框线”叠加的,可以采用线框、箭头、直线、甚至虚线来强调模态向量。在模态分析和模态设计过程中都可以使用动画显示。其工作平稳、清晰,并具有高度对话性。使用独立的动画显示窗,可以拥有无限多的灵活显示功能,包括多重动画、动画显示与FRF静态显示相混合,甚至可以比较不同项目(即修改前后)的动画显示。

动画显示具有下列特点:

- 显示布局可以自己定义与存储,需要时很容易调出。

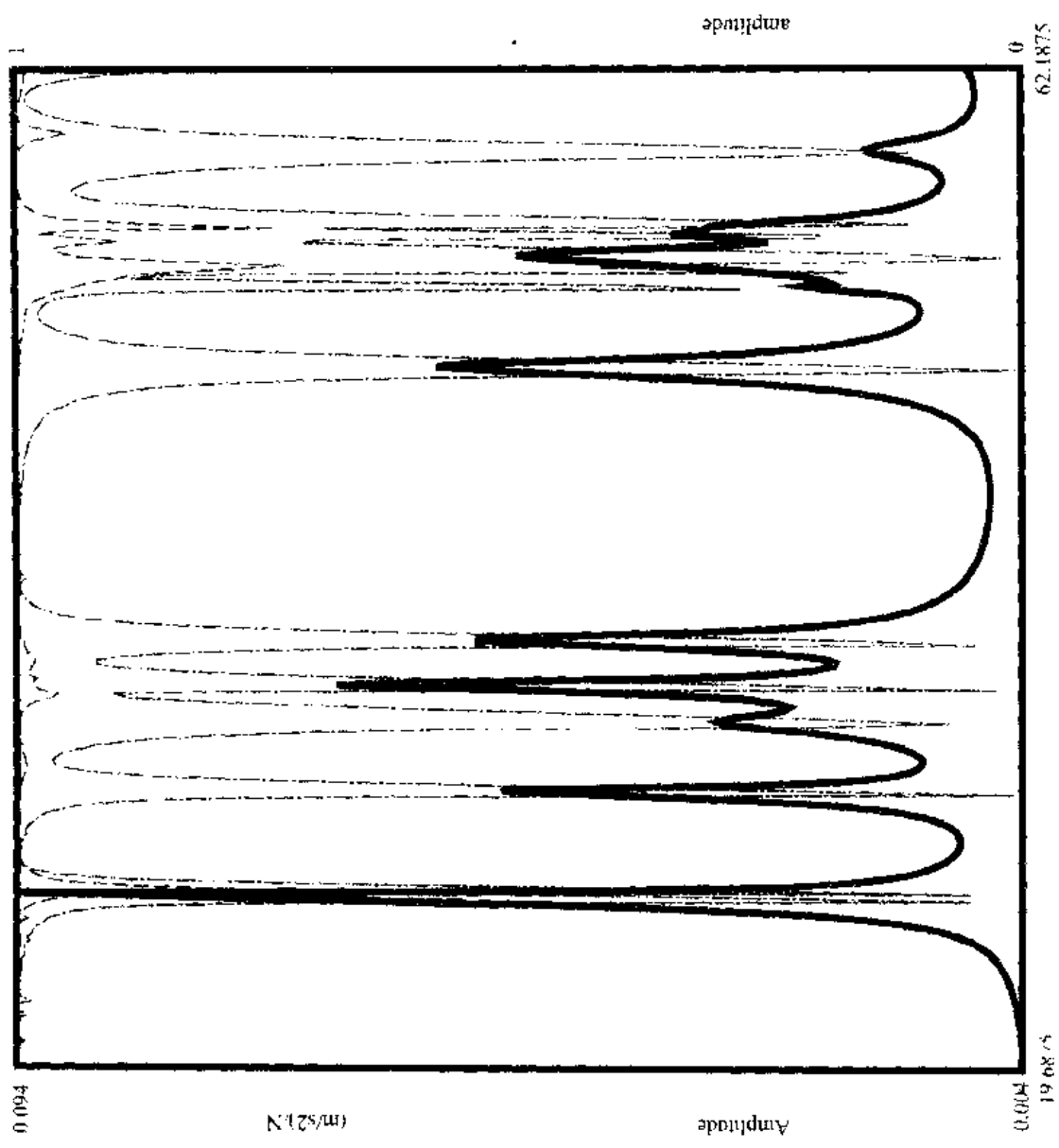


图 bb.1.1 模态指示函数和响应函数之和 点划线: MIF1; 虚线: MIF2; 粗实线: 响应函数之和

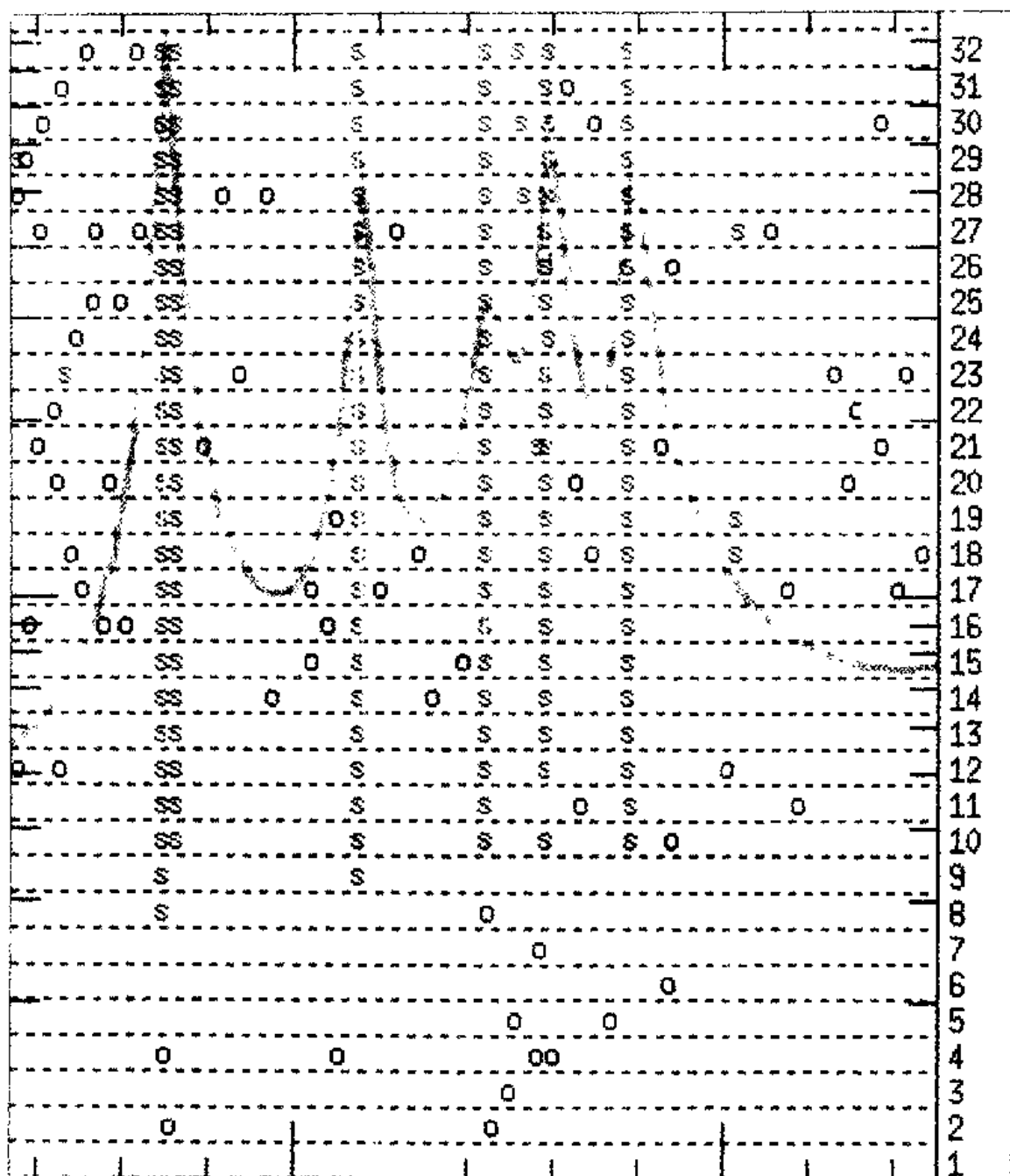


图 bb.1.2 用稳态图可以区分物理模态和计算模态

- 几何模型及相应分析结果可以从不同的项目中调进来,进行比较。
- 动画显示窗可以进行多种操作:打开不同类型窗,改变刷新速度,比例缩放/旋转/平移/透视角,模态向量比较,隐线开关,拷贝,节点显示,部件操作显示,振型打印输出等。

(2) 结果显示方式

结果显示方式更接近于实际,类似于三维动画显示,比动画显示方式更直观,更漂亮,其动画过程可以输出写成 AVI 电影文件。

BB.1.6 CADA-X 模态设计软件

提供了一种环境,可以完成各种以结构模态模型为基础的分析工作,进行修改设计,预测结构的动态特性。该软件包括几个不同的功能模块,全部集成在一个环境中。在模态设计环境中,一般试验数据的静态显示、分析结果的动画显示、全套模态模型验证工具都是可以使用的。

BB.1.6.1 灵敏度分析

灵敏度分析的工作对象是结构的模态模型,计算其动态特性(模态频率和阻尼,模态振型)对结构参数变化的敏感度。

在样机的设计修改过程中进行灵敏度分析的主要优点是:

- 指出最合理的修改方式;
- 指出各种可能修改的最佳位置或区域;
- 指出这些修改的效果如何。

图形显示窗可以帮助你确定结构上可望实行修改的一些区域。计算结果可立即出来并转化为灵敏度显示在彩色几何线架图上,最灵敏的部位将以红色加以强调。灵敏度分析结果可贮存在对应的项目数据库中以备后用。

BB.1.6.2 结构修改预测与子结构综合

预测结构修改对机械结构的动态特性有何影响,可以使用模态综合技术。根据子结构的试验模态模型(或有限元模型),将它们耦合在一起,预测整体结构的动态特性,就是所谓的子结构综合。

在样机优化过程中,进行结构修改预测的优点是:

- 毋须对结构做物理上的改变即可预测某种修改对结构会有何种影响;
- 不必重做试验便可对另一些设计方案进行评价;
- 从整体上评估所选修改对结构动态特性有何影响。

子结构综合法可用于:

- 根据对整体结构的动态特性之影响来评估一个或多个子结构的各种设计方案,而不必对整个结构进行重复试验或重新建模。
- 可将有限元模型与试验模型进行匹配综合。
- 分析大型的结构模型,其整体的结构试验是无法实现的。

可能的修改方式:改变集总质量、刚度和阻尼、增加杆件、增加梁、增加桁架结构、阻尼吸收器,以及上述各项的组合。大量的修改可同时处理。结合前面的灵敏度分析结果可以选择最佳的修改类型和位置。

进行修改之前,会自动检验模型的适调性。如果出现数值不稳定性(例如由于修改过多),则发出警告。

原始模态模型和修改后的模态模型都保留在内存中备用,以便进行累积或其他修改预测计算,可以对修改过的模型进行动画显示、模型验证或强迫响应预测。

BB.1.6.3 强迫响应预测

强迫响应预测是利用结构的模态模型预测结构在各种载荷条件下的响应动态特性。

在样机故障分析或优化过程中,强迫响应预测的典型应用是:

- 对于给定的载荷条件,对响应谱或时间历程进行预测,例如预测行驶在—特定路面上的汽车座椅的运动。

- 调查处于工作条件下的结构的响应谱或时间历程,估算预定的设计修改。
- 计算给定频率(如发动机转速)上的结构受迫振动变形。
- 动画显示结构的响应谱或响应时间历程,以便检测工作条件下结构的最大物理变形。

在软件环境中可以方便地规定激励力的类型:均匀随机、高斯随机、用户定义的频谱、用户定义的时间历程和实际测量的力。激励力输入的位置和方向可通过几何或精心设计的形式加以规定

不同类型的力进行组合并施加到结构上。通过积分和微分运算,结果可以在加速度、速度和位移之间转换。为了清楚解释所加的力和所计算的响应,还可以利用静态显示。对于任何频率和所加的任何力,都可计算受迫变形并予以动画显示,可以找出最大的物理变形。

强迫响应分析结果可储存于 CADA - X 项目数据库中。

另外在 CADA - X 软件中还提供了基于 FRF 函数的子结构综合分析软件包,扩展了子结构综合分析方法的使用频率范围。

BB.1.7 CADA - X 工作模态分析软件

——基于实际工作数据的模态建模

传统的模态试验通常是在受控条件下进行的,比如试验是在实验室完成的,悬挂方式是自由—自由条件,输入力的特性是已知的等等。然而,极少有结构会在这样的条件下工作——比如结构中的非线性、比较大的输入力、各种各样的边界条件……等各种因素都会发挥作用,如何考虑? 体积过大,或结构已经安装,不可能移到实验室内,又该怎样处理? 甚至结构承受的输入力无法测量,你能说清哪些模态会被激发出来吗? 诸多问题,你只有借助工作模态分析方法才能解决。

在 LMS CADA - X 模态分析系统中已经增加了这一最新分析软件模块,能够从实际工作条件下取得的响应测量数据来确定模态参数:模态频率、振型及阻尼值。不必进行额外的试验,该软件就能将经典的“运行模式分析”(ODS)研究提高到一个更高的水平;能够分离并识别出模态参数,而不仅仅是给出工作变形形状(工作变形形状是各种不同模态与强迫响应的组合)。

BB.1.7.1 工作模态分析的步骤:

(1) 数据采集和预处理

无需额外的试验工作,在实际结构工作之时采集记录多通道的时域或频域数据。然后,再通过人机对话按一定的速度范围、时间段或年月日选择数据组,进行建模分析。在进行工作模态分析时,是以响应的时域相关函数做为输入的,因此要对测量的数据进行预处理,比如对试验得到的互功率谱和自功率谱要进行离散傅立叶反变换得到相关函数。而对响应时间历程数

据,则是在时域中直接计算相关函数。如选择响应点和参考点,观察时间段数据,确定数据块大小,并进行时域计算。

(2) 模态模型识别

识别过程及灵活性与前面的经典模态分析相类似,包括:

- 互功率谱求和、选择频带;
- 确定模型阶次,稳定容限,时间窗;
- 在稳态图上人工选择极点。

三种标准的识别方法:

多参考点 LSCE 法,与经典的 LSCE 类似,但识别基础是相关函数而不是脉冲响应函数;专用的 LSFD(最小二乘频域)对互功率谱进行曲线拟合以便获得模态振型。这种方法计算速度最快,处理的数据组和模型尺寸也最大。这种方法对于试验任务结束之前为验证原始数据而进行的快速分析极为理想。

两种子空间法:

借助奇异值分解进行识别;同时进行模态振型的估计:

① 均衡实现法(BR),它非常稳定,允许在模型中有更多的互相关参考点。它提取模态参数所需步骤最少。

② 正则变量分析法(CVA),它把所有响应点作为参考点来计算相关函数。通过加权能够识别隐藏着的模态以及那些很难激励出来的模态。

(3) 模态模型验证

模态模型的验证方法:

- 稳态图:将物理极点与计算极点区别开来;
- 模态置信准则(MAC);
- 模态相位共线性与相位偏移、相位分散图;
- 自功率谱与互功率谱综合;在线或在完成分析之后;
- 模态振型的动画显示(并能保存成多媒体文件)。

BB.1.7.2 工作模态分析的典型应用:

- 实际工作条件下的模态模型提取:
 - 在试验场、现场或转鼓试验台上进行试验的车辆;
 - 直升机及飞机上的飞行数据;
 - 时变系统,如发射过程中的火箭;
 - 引起问题的气/液流管道;
 - 受到环境激励的桥梁、建筑物、天线、塔吊起重机以及海上平台;
 - 在振动台上经受环境试验的卫星。
- 状态监视与趋势分析;
- 非线性系统研究;
- 故障分析;
- 验证有限元模型的正确性。

BB.1.8 有限元模型的验证和修正

在产品的设计过程中,通常要进行有限元分析,在此基础上再进行进一步的分析,如子结构综合、疲劳分析、声学分析、缩短产品设计周期等等。而所有这一切都需要建立正确而可靠的分析模型。由于在建模过程中做了许多假设,而且还要依赖相当的建模经验,因此在很多情况下根据所建立的有限元模型做出的分析预测和实际的试验结果有很大的区别。这就需要对有限元模型进行分析和修正。

LMS 公司提供了一套完整的分析软件 GATEWAY 可以完成这些工作。

BB.1.8.1 数据管理和接口

GATEWAY 软件可以提供试验 - 试验,试验 - 有限元,以及有限元 - 有限元模型的相关性分析,可以分析多种有限元软件的结果和不同的有限元模型。

支持的有限元程序:MSC/NASTRAN, ANSYS, SAMCEF 等多种商业化软件包,对于 MSC/NASTRAN 软件,还提供了直接的动态接口,在 GATEWAY 中直接集成了单元矩阵生成软件,允许基于 MSC 模型直接进行灵敏度分析和模型修正分析。

BB.1.8.2 预试验分析

基于有限元模型,建立试验模态方案,确定最优的响应传感器的位置,最优的模态激振器的位置和方向,自动生成模态试验的几何线架模型。

BB.1.8.3 相关性分析

- 自动的模型几何相关性分析;
- 基于模态的相关性分析:
 - MAC 模态置信准则;
 - MAC 贡献量分析;
 - CoMAC;
 - 有限元和试验模态振型正交性;
 - 振型扩展和系统矩阵压缩(Guyan 和 IRS 法)。
- 基于 FRF 的相关性分析:
 - FRAC 频响置信准则;
 - RVAC 响应矢量置信准则;
 - FRF 综合。

BB.1.8.4 灵敏度分析

- 计算模态频率和 FRF 函数对设计参数的灵敏度:
 - 质量和/或刚度的比例改变;
 - 材料和/或几何特性的改变。
- 误差确定的方法;

- CoMAC;
- MAC 贡献量分析;
- 力平衡;
- 影响力最大的参数的迭代排序。

BB.1.8.5 模型修正分析

- 选择设计参数;
- 定义设计参数的约束条件;
- 对设计目标加权;
- 定义重量约束条件;
- 在模态域中求解特征值。

BB.2 KISTLER 振动测量设备简介

BB.2.1 各种类型加速度计

该公司传感器种类繁多,现将常用于实验模态分析及冲击试验的有关产品列于下面:

(1) 模态试验加速度计

应用领域:模态分析,结构试验,车辆悬挂系统研究,导弹飞船振动研究,试验室振动测试等。

主要特点:剪切设计,低阻抗信号,与地绝缘

型号	高/低阻抗	测量范围 /($\pm g$)	灵敏度 (mV/g)	分辨率 / g_{rms}	频率响应 /Hz($\pm 5\%$)	质量 /g	地绝缘
8776A50	低	50	100	0.002 5	1~7k	4	否
8776A50M1	低	50	100	0.002 5	0.5~4k	4.3	是
8774A50	低	50	100	0.002 5	1~10k	4	否
8772A50	低	50	100	0.002	1~5k	8	是
8772A50M10 *	低	50	100	0.002	1~5k	8	是
8692C10	低	10	500	0.000 28	0.5~5k	16	是
8692C10M1	低	10	500	0.000 28	0.5~5k	16	是
8772A10	低	10	500	0.000 5	1~5k	8	是
8772A5	低	5	1 000	0.000 4	1~5k	8	是
8638B5	低	5	1 000	0.000 12	0.5~2k	12	是

注: * 8772A50M10 为符合 IEEE 1451 标准的电子数据智能加速度传感器;

g :重力加速度;

rms :均方根值。

(2) 三轴向加速度计

应用领域:模态分析,车辆悬挂系统研究,导弹及飞行器振动检测,一般振动测量等

主要特点:剪切设计,结构坚固

型号	高/低阻抗	测量范围 /($\pm g$)	灵敏度 /(mV/g)	分辨率 / g_{rms}	频率响应 /Hz($\pm 5\%$)	质量 /g	地绝缘
8290A25	高	1000	-25pC/g	0.0012	1~4k	34	绝缘垫片
8794A500	低	500	10	0.008	1~10k	7.6	否
8790A500	低	500	10	0.008	0.1~5k	11	是
8793A500	低	500	10	0.008	1~10k	11	否
8792A500	低	500	10	0.010	0.5~9k	27	是
8791A250	低	250	20	0.005	1~5k	4	否
8792A100	低	100	50	0.009	3~9k	29	是
8792A50	低	50	100	0.005	3~5k	29	否
8795A50	低	50	100	0.001	1~4k	32	绝缘垫片
8792A25	低	25	200	0.003	3~5k	29	是

注: g :重力加速度;

rms :均方根值。

(3)冲击与高量程加速度计

应用领域:冲击与碰撞试验等

主要特点:共振频率高,基座应变灵敏度低

型号	高/低阻抗	测量范围 /($\pm g$)	灵敏度 /(mV/g)	分辨率 / g_{rms}	频率响应 /Hz($\pm 5\%$)	质量 /g	地绝缘
8042	高	+100k, -50k	-0.05pC/g	0.6	1~8k	8	否
8044	高	+30k, -20k	-0.3pC/g	0.1	1~8k	7	否
8743A100	低	100k	0.05	2.6	0.5~10k	4.5	否
8742A50	低	50k	0.1	1.3	0.5~10k	4.5	否
8742A20	低	20k	0.25	0.5	1~10k	4.5	否
8742A10	低	10k	0.5	0.25	1~10k	4.5	否
8742A5	低	5k	1	0.13	1~10k	4.5	否
8704B5000	低	5 000	1	0.01	1~10k	7.1	绝缘垫片
8704B500	低	500	10	0.01	0.5~10k	7.1	绝缘垫片
8704B500M1	低	500	10	0.01	0.5~9k	7.6	是

注: g :重力加速度;
 rms :均方根值。

(4)K-BEAM 超低频变电容式加速度计

应用领域:低频模态分析,机器人,车辆试验,建筑振动测量,桥梁和大型建筑测量等

主要特点:频响低频至 0 Hz,灵敏度高

型 号	测量范围 /($\pm g$)	灵敏度 /(mV/g)	分辨率 / mg_{rms}	线性 /($\pm \%FS$)	频率响应 /Hz($\pm 5\%$)	工作温度 / $^{\circ}C$	满幅输出 /V	质量 /g	单轴/三轴
8304B2	2	1 000	0.1	<2	0~310	-40~85	± 2	7.5	单轴
8304B10	10	200	0.6	<2	0~180	-40~85	± 2	7.5	单轴
8304B20	20	100	1.0	<2	0~160	-40~85	± 2	7.5	单轴
8305A2	2	500	0.2	<0.8	0~300	-40~85	± 1	6.5	单轴
8305A10	10	100	1.0	<0.9	0~180	-40~85	± 1	6.5	单轴
8305A25	20	50	3	<1.5	0~100	-40~85	± 1	6.5	单轴
8310A2	2	1 000	0.28	<0.8	0~300	-40~85	± 2	6.5	单轴
8310A10	10	200	-	<0.8	0~180	-40~85	± 2	6.5	单轴
8310A25	25	80	-	<0.8	0~180	-40~85	± 2	6.5	单轴
8324A20	20	100	0.8	<0.5	0~500	-40~85	± 2	15	单轴
8324A50	50	40	-	<0.5	0~500	-40~85	± 2	15	单轴
8356A2	2	500	0.4	<0.9	0~400	-40~125	± 1	2.9	单轴
8356A10	10	100	1	<0.9	0~250	-40~125	± 1	2.9	单轴
8392A2	2	500	0.3	<1	0~150	-20~85	± 1	42	三轴
8392A10	10	100	1.5	<1	0~60	-20~85	± 1	42	三轴
8392A20	20	50	3	<1	0~50	-20~85	± 1	42	三轴

BB.2.2 结构试验和模态分析专用产品

用途:激励点阻抗测量,力限振动试验

特点:力和加速度相位匹配好

(1) 8770A 系列阻抗头

型 号	加速度测量范围 /g	加速度分辨率 /g _{rms}	加速度灵敏度 /(mV/g)	力测量范围 /lb	力分辨率 /lb	力灵敏度 /(mV/lb)
8770A5	±5	0.000 4	1 000	±5	0.000 13	1 000
8770A50	±50	0.001	100	±50	0.001 3	100

(2) 力限传感器

型号	9000 系列	9130 系列	9300 系列	9712 系列	9205 /9207	9251A	9602
测量范围 /N	0~7.5k, 15k,... 1 200k	0~2.5k, 10k,... 80k	±2.5k, ±5k,... ±120k	0~25, 250,1k, 2.5k,25k	±50	F _z : ±5k F _x , F _y : ±2.5k	量程 1: F _z : ±5k, F _x , F _y : ±2.5k 量程 2: F _z : ±1k, F _x , F _y : ±0.5k
高/低阻抗	高	高	高	低	高	高	低
分辨率/N	≤0.01	≤0.01	≤0.02	0.0005, 0.005, 0.02, 0.05,0.5	0.000 5	<0.01	~0.4
特点	体积小	超薄	无需预紧	高灵敏, 电压输出	小量程, 高灵敏	三轴	三轴,电压输出

(3) 9720 系列冲击力锤

规范条件		单 位	型 号						
			9722A500	9722A2000	9724A2000	9724A5000	9726A5000	9726A20000	9728A20000
范围(5V 输出)		N	500	2 000	2 000	5 000	5 000	20 000	20 000
过载		N	2 500	10 000	10 000	12 500	12 500	25 000	25 000
灵敏度		mV/N	10	2	2	1	1	0.2	0.2
时间常数		s	500		500		500		500
频率范围(-10 dB)		kHz	8.2	9.3	6.6	6.9	5.0	5.4	1
刚性		N/ μ m	800		800		800		2700
工作温度范围		$^{\circ}$ C	-20~70						
电源		mA, VDC	2~20(恒流), 18~30						
尺 寸	锤头直径	mm	17.5		23		32		51
	锤头长度	mm	61		89		94		152
	手柄长度	mm	188		231		236		307
击锤质量		g	100		250		500		1 500

BB.2.3 电荷放大器和信号调节仪

(1) 电荷放大器

型号	测量范围/pC (对应 $\pm 10\text{V}$)	通道数	量程调节	电 源	尺 寸 /(mm \times mm \times mm)
5010B1	10 ~ 99k	1	连续	220 VAC	94 \times 150 \times 196
5011B11	10 ~ 999k	1	连续	220 VAC	94 \times 150 \times 196
5015	2 ~ 2, 200K	1	连续	220 VAC	105 \times 142 \times 253
5017B(x)	10 ~ 999k	3 ~ 8	连续	220 VAC	510 \times 188 \times 280
5026	10 ~ 500k	1	固定	220 VAC	68 \times 145 \times 228
5027A(x)	150 ~ 450k	1	固定	10 ~ 36 VDC	66 \times 16(Diameter)
5034A(x)	100 ~ 100k	1 ~ 3	10 挡	15 ~ 30 VDC	150 \times 35 \times 64
5037B(x)	20 ~ 200k	1 ~ 3	固定	± 15 VDC	120 \times 33 \times 74
5038A(x)	100 ~ 100k	1 ~ 3	3 挡	15 ~ 30 VDC	172 \times 43 \times 64
5039A(x)	5 ~ 50k	1	2 挡	18 ~ 36 VDC	99 \times 33 \times 81
5041E(x)	100 ~ 99.9k	1	连续	± 15 or 24 VDC	48 \times 30 \times 114
5058A(x)	10 ~ 1000k	任意	5 挡	± 15 VDC	20 \times 99 \times 160

(2) 信号调节仪

型 号	通道数	增 益	电 源	尺寸 /(mm \times mm \times mm)	备 注
5108	1	1	24 ~ 32 VDC	28 \times 43 \times 96	
5110	1	1	9V 电池	97 \times 61 \times 45	
5114	1	1	9V 电池	81 \times 150 \times 35	
5118B2	1	1/10/100	4 \times 1.5V 电池	91 \times 46 \times 190	
5124A	12	1	220 V AC	482 \times 46 \times 203	
5124A1	12	0.1 ~ 100	220 VAC	482 \times 46 \times 203	
5127B(x)	1	1/10	22 ~ 30 VDC	76 \times 35 \times 114	
5128A	16	1	220 VAC	482 \times 46 \times 160	
5128AM3	16	1/10/100	220 VAC	482 \times 46 \times 160	
5134A1	4	1/2/5/10/20/50/100	220 VAC	94 \times 150 \times 196	
5148	16	1	220 VAC	45 \times 483 \times 222	
5210	1	1/2/10/20	9V 电池	147 \times 91 \times 33	用于 K-BEAM 电容式传感器

BB.3 东华测试技术开发公司产品简介

BB.3.1 电荷放大器

特点:输出电压与输入电荷成正比,可用于压电式传感器及其他电荷量输出的传感器信号的适调、放大和预处理。

应用范围:振动测试、模态分析

主要技术指标:

型 号	特 点	测量物理量	输出灵敏度 /(mV/单位)	不准确度 /%	输入噪声 /pC	上限频率 /kHz	下限频率 /Hz
DH5852	低噪声	加速度	0.1~1 000	1	3×10^{-3}	0.3~100	0.3~100
DH5852	低价格	加速度	1~1 000	1.5	8×10^{-3}	1~100	1
DH5852	隔离型	加速度	1~1 000	1.5	5×10^{-3}	0.3~100	0.3~100
DH5852	双积分	加速度	1~1 000	1	4×10^{-3}	0.3~100	0.1、1
DH5852		速度					1、10
DH5852		位移					1、10
DH5852	适应恶劣环境	加速度	1~1 000	1.5	8×10^{-3}	用户选定	用户选定

BB.3.2 DH5862 型可编程电荷放大器

特点:

- ① 放大器所有参数皆可通过面板手控或通过计算机进行程序控制;
- ② 极低的输入噪声;
- ③ 良好的幅频特性和相频特性;
- ④ 结构紧凑,布局合理。

主要技术指标:

- ① 最大输入电荷量: 10^6 pC;
- ② 放大器输出灵敏度:0.1,1,10,100,1 000(mV/单位)五挡分挡切换;
- ③ 不准确度:小于 1%;
- ④ 下限频率($-3 \text{ dB} \pm 1 \text{ dB}$):0.3,1,3,10,30,100(Hz)六挡分挡切换;
- ⑤ 上限频率($-3 \text{ dB} \pm 1 \text{ dB}$):0.3,1,3,10,30,100(kHz)六挡分挡切换;
- ⑥ 失真度:小于 1%(频率小于 30 kHz)
- ⑦ 输出电压:7 V_{rms};
- ⑧ 过载指示:输出大于 $\pm 10 \text{ V}_p$ 时,过载指示灯亮;
- ⑨ 外形尺寸:177 mm×235 mm×317 mm(高×宽×深)(八通道)。

BB.3.3 DH5932 数据采集记录分析系统

特点:

- ① 硬件采取高度集成的模块化设计,每个模块 8 个通道,一台计算机最多可控制 128 个通道,满足多通道、高精度、高可靠性动态信号测试需求;
- ② 中文 Win95/98 下全汉 32 位应用分析软件,可进行频域、时域和幅值域的分析处理;
- ③ 各通道具有独立高速转换器及缓冲存储器,实时并行同步采样,并大大提高了测试系统抗干扰能力;
- ④ 具有优良的瞬态信号捕捉功能。系统设有内触发、外触发、手动触发功能,正负延时可调,触发电平可调。

主要技术指标:

- ① 信号输入方式:GND、DC、AC;
- ② 程控电压量程: $\pm 0.3\text{ V}$ 、 $\pm 1\text{ V}$ 、 $\pm 3\text{ V}$ 、 $\pm 10\text{ V}$;
- ③ A/D 转换器:12 位;
- ④ 采样速率:
 - 128 通道并行实时无间断记录可达 1 kHz;
 - 128 通道并行最高采样速度可达 500 kHz;
- ⑤ 数据记录时间长度:
 - 实时无间断记录方式时,受计算机硬盘剩余空间的限制;
 - 非磁盘记录方式时,每个通道 1k 至 64k 数据点任设。
- ⑥ 不确定度:小于 0.2%;
- ⑦ 触发方式:手动触发、外触发、内触发(信号触发);
- ⑧ 内触发电位:满度值的 5% ~ 95% 可调,或 OFF 关闭该通道触发功能。

BB.3.4 分析处理软件

配合 DH5862 可编程电荷放大器和 DH5932 数据采集记录分析仪,有许多分析处理软件可以选用:

- ① 基于 FFT 的信号处理:幅值谱、相位谱、自功率谱、互功率谱、传递函数、奈奎斯特图、三维谱图、倒谱;
- ② 相关函数:自相关函数、互相关函数;
- ③ 时域处理:线性平均、指数平均、过零率;
- ④ 包络曲线;
- ⑤ 幅值域处理:平均值、单峰值、峰 - 峰值、有效值、直方图、概率密度函数、累积密度函数、高峰突出度;
- ⑥ 其他分析软件可选:自回归谱、细化分析、边带分析、小波变换;
- ⑦ 自然响应模态分析软件。

BB.3.5 DH5936 多通道便携式振动分析测量系统

主要特点:

① 与笔记本电脑的并口进行动态数据通讯,最大程度上满足了对便携式仪器的要求,可方便地应用于野外测试;

② 每通道具有独立的放大器和 A/D 转换器;

③ 所有通道并行同步采样,产品模块化设计,可容易地构成 8 通道或 16 通道动态分析测试系统;

④ 数字磁带机信号记录功能,利用计算机海量存储硬盘,长时间实时、无间断记录多通道信号;

⑤ 中文 Win95/98 下 32 位全汉化应用软件,丰富的分析处理功能,提供了频域、时域及幅值域的分析处理软件;

⑥ 结构合理,外形美观。

主要技术指标:

① 通道数:每台计算机最多可控制 16 通道;

② 满度数:5、50、500、5 000 m/s^{-2} ;

③ A/D 分辨率:12 位;

④ 采样速率:8 通道同时工作时,每通道 10 Hz ~ 20 kHz 任意选择;

16 通道同时工作时,每通道 10 Hz ~ 10 kHz 任意选择。

⑤ 系统不确定度:不大于 1%;

⑥ 输入噪声: $5 \times 10^{-3} \text{pC}$ 。

参 考 文 献

A.1 章 解析模态分析和实验模态分析

- a.1.1 Allemang R. Vibrations: Analytical and Experimental Modal Analysis. course text, ref: UC - SDRL - CN - 20 - 263 - 662, University of Cincinnati, Ohio, USA, June. 1992, pp.158.
- a.1.2 Ewins D J. modal Tesing: Theory and Practice. Research Studies Press Ltd, England, ISBN 0 86380 017 3, 1984.
- a.1.3 Randall R. Frequency Analysis. Brüel & Kjær, 1987.

A.2 章 (数字)信号处理:基本理论

- a.2.1 Gold B, Rabiner C M. Digital processing of signals. Mc Graw Hill. New - York. 1969.
- a.2.2 Oppenheimer A V, Schafer R W. Digital Signal Processing. Prentice Hall, 1975.
- a.2.3 Habiner L R, Gold B. Theory and applications of digital signal processing. Prentice Hall, 1975.
- a.2.4 Brigham E O. The Fast Fourier Transform. Prentice Hall, 1974.
- a.2.5 Beauchamp K G, Yueu C K. Digital methods for signal analysis. George Allen & Unwinn, London, 1979.
- a.2.6 Bendat J. S, Pierso A G. Random Data: Analysis and Measurement Procedures. Wiley - Interscience, 1971.
- a.2.7 Bracewell R N. The Fourier Transform and Its Applications. McGraw - Hill Book Company, 1986.
- a.2.8 Ramirez R W. The FFT: Fundamentals and Concepts. Prentice Hall, 1985.
- a.2.9 Randall B. Frequency Analysis. Brüel & Kjær, 1987.
- a.2.10 Harris F J. On the Use of Windows for Harmonic Analysis with the Discrete Fourier Transform. IEEE 66, pp. 51 ~ 83, 1978.
- a.2.11 Harris F J. Trigonometric Transforms San Diego State University.
- a.2.12 Elliot D F. Rao K R. Fast Transforms: Algorithms, Analyses, Applications. Academic Press, New York, 1982.
- a.2.13 Wellstead P E. Methods and Applications of Digital spectral Techniques. technical report nr. 008/83, Solartron, Farnborough, U. K., 1983.
- a.2.14 N. Dynamic Signal Analyzer Applications; Effective Machinery Maintenance Using Vibration Analysis. application note 243 - 1, Hewlet Packard, 1983.
- a.2.15 Norton M P. Fundamentals of Noise and Vibration Analysis for Engineers. Cambridge University Press, Melbourne, Australia, 1989.
- a.2.16 Angelo M. Vibration Monitoring of Machines. Technical Review no.1, Brüel & Kjær, 1987.

- a.2.17 Sas P. The Use of Digital Signal Processing Techniques in Acoustic Noise Source Localization, including Acoustic Intensity Measurements. Ph. D. dissertation, Dept. mechanical Engineering, K. U. Leuven, 1983.
- a.2.18 Allemang R, Brown D, Rust R. Experimental Modal Analysis and Dynamic Component Synthesis, Vol. II : Measurement Techniques for Experimental Modal Analysis. Report AFWAL - TR - 87 - 3069, Ohio 45533 - 6553, pp.29 - 40, 1987.
- a.2.19 Herlufser H. Dual Channel FFT Analysis(Part 1 & 2). Technical Review no. 1, Brüel & Kjær, 1984.
- a.2.20 Vold H, Crowley J, Rocklin G. A Comparison of H_1 , H_2 , H_∞ Frequency Response Functions. Proceedings of the 3rd IMAC, pp. 272 ~ 278, 1985.
- a.2.21 Allemang R. Investigation of Some Multiple Input/Output Frequency Response Function Experimental Modal Analysis Techniques. Ph. D. Dissertation, University of Cincinnati, Mechanical Engineering Department, 1980.
- a.2.22 Rost R. Investigation of Multiple Input Frequency Response Function Estimation Techniques for Modal Analysis. Ph. D. Dissertation, University of Cincinnati, Mechanical Engineering Department, 1985.
- a.2.23 Formenti D, Allemang R, Rost R, Severyn T, Leuridan J. Analytical and Experimental Modal Analysis. Proceedings of the 14th ISMA, Part 1, paper 3, K. U. Leuven, Mechanical Engineering Department, 1989.
- a.2.24 Leuridan J, Van H der Auweraer, Mergeay M. Review of Parameter Identification Techniques. Report ESPRIT project 1561; SACODY, L. M. S., Proceedings of the 14th ISMA, Part 2, paper 12, K. U. Leuven, Mechanical Engineering Department, 1989.
- a.2.25 Lembregts F. Parameter Estimation in Modal Analysis. Proceedings of the 14th ISMA, Part 2, paper 13, K. U. Leuven, Mechanical Engineering Department, 1989.
- a.2.26 Bogert B, Healy M, Tukey J. The Quefrency Analysis of Time Series for Echoes: Cepstrum, Pseudo - Autocovariance, Cross - cepstrum and Saphe Cracking. Proceedings of the Symposium on Time Series Analysis, Ed: M. Rosenblatt, Wiley N. Y., pp.209 ~ 243, 1963.
- a.2.27 Bradshaw P, Randall R. Early Detection and Diagnosis of Machine Faults on the Trans Alaska Pipeline. MSA - Session, ASME Conference, Dearborn MI, pp. 7 ~ 17. September, 1983.
- a.2.28 Gade S, Herlufser H. Windows to FFT Analysis, Sound and Vibration. March. 1988

A.3 章 模态参数估计

- a.3.1 Lembregts F. Parameter Estimation in Modal Analysis. Proceedings of ISMA 14. Leuven, Belgium, September, 1989, pp.33.
- a.3.2 Leuridan J, Van H der Auweraer, Mergeay M. Review of Parameter Estimation Tech-

- niques. Technical Report for ESPRIT project 1561 'Sacody', ISMA 13, Leuven, Belgium, September, 1988. pp.60.
- a.3.3 Ewins D J. Modal Tesing: Theory and Practice. Research Studies Press Ltd, England, ISBN 0 86380 017 3, 1984.
 - a.3.4 Brown D, Allemang R, Zimmerman R, Mergeay M. Parameter Estimation Techniques for Modal Analysis. SAE – paper 790221, 1979, pp.19.
 - a.3.5 Ibrahim S, Mikulcik E. A Method from the Direct Identification of Vibration Parameters from the Free Response. The Shock and Vibration Bulletin 47/4, 1977, pp.183 ~ 198.
 - a.3.6 Juang J – N, Pappa R. An Eigensystem Realization Algorithm (ERA) for Modal Parameter Identification and Model Reduction. NASA/JPL Workshop on Identification and Control of Flexible Space Structures at San Diego, CA, USA. 1984.
 - a.3.7 Leuridan J. Some Direct Parameter Model Identification Methods Applicable for Multiple Input Modal Analysis. Ph.D.Dissertation, Dept. of Mech. and Ind. Eng., University of Cincinnati, Cincinnati, Ohio, USA, 1984.
 - a.3.8 Busturia J, Gimenez J. Multi – exciation Multi – response Non – linear Least Squares Algorithm. Proceedings of ISMA 10, Leuven, Belgium, September, 1985, pp.21.
 - a.3.9 Mergeay M. Least Squares Complex Exponential Method and Global System Parameter Estimation Used by Modal Analysis. Proceedings of ISMA 8, Leuven, Belgium, September, 1983, pp.19.
 - a.3.10 Link M, Vollan A. Identification of Structural System Parameters from Dynamic Response Data. Zeitschrift für Flugwissenschaften und Weltraumforschung 2/3, 1978, pp.165 ~ 174.
 - a.3.11 Van H der Auweraer, Leuridan J. Multiple Input Orthogonal Polynomial Parameter Estimation. Proceedings of ISMA 11: workshop on parameter estimation, leuven, Belgium, September, 1986, pp.16.
 - a.3.12 Lembregts F. Frequency Domain Identification Techniques for Experimental Multiple Input Modal Analysis. Ph.D.Dissertation, Dept. of Mech. Eng., KU Leuven, Belgium, December, 1988, pp.260.
 - a.3.13 Coppolino R N. Simultaneous Frequency Domain Technique for Estimation of Modal Parameters from measured Data. Society of Automotive Engineers, paper no. 811046, 1981.
 - a.3.14 Fladung W, Brown D. Multiple Reference Impact Testing. Proceedings of ISMA 17, Leuven, Belgium, September, 1992, pp.257 ~ 272.

A.4 章 模型验证

- a.4.1 Allemang R. Investigation of Some Multiple Input/Output Frequency Response Function Experimental Modal Analysis Techniques. Ph.D.Dissertation, University of Cincinnati, Mechanical Engineering Department, 1980.
- a.4.2 CADA N Modal/Analysis User Manual, Chapter 5: Modal Model Validation, Rev.2.3,

LMS – International, Leuven.

- a.4.3 Juang J – N, Pappa R. An Eigensystem Realization Algorithm (ERA) for Modal parameter Identification and Model Reduction. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol.8, No.5, Sept. 1985, p.620 ~ 627.
- a.4.4 Ibrahim S. Modal Confidence Factor in Vibration Testing. *AIAA Journal of Spacecraft and Rockets* 15/5, 1978, p.313 ~ 316.
- a.4.5 Lembregts F. Frequency Domain Identification Techniques for Experimental Multiple Input Modal Analysis. Ph.D. Dissertation, Dept. of Mech. Eng., KU Leuven, Belgium, December, 1988, pp.260.

A.5 章 模态参数的应用

- a.5.1 Fox R L, Kapoor M P. Rates of Change of Eigenvalues and Eigenvectors. *AIAA Journal*, Vol.6, 1968, pp.2426 ~ 2429.
- a.5.2 Vanhonacker P. The Use of Modal Parameters of Mechanical Structures in Sensitivity Analysis, System Synthesis and System Identification methods. Ph. D. Dissertation, Dept. of Mech. Eng., KU Leuven, Belgium, September, 1988, pp.250.
- a.5.3 De/Landsheer A. Dynamic Optimisation with Modal Analysis. *DYNOPS User Manual*, March, 1984
- a.5.4 Allemang R, Brown D, Soni M. Experimental Modal Analysis and Dynamic Component Synthesis – Vol. IV: System modeling Techniques. Report AFW ALTR – 87 – 3069, Wright – Patterson AFB, Ohio 45433 – 6553, 1987, pp.84.
- a.5.5 Klostermar A. On the Experimental Determination and Use of Modal Representations of Dynamic Characteristics. Ph.D. Dissertation, University of Cincinnati, 1971.
- a.5.6 Crowley J, Klosterman S, Rocklin G, Vold H. Direct Structural Modification Using Frequency Response Functions. *Proceedings of the 2nd International Modal Analysis conference*. Orlando, Florida, Ed: Union College, Schenectady. New York, February, 1984, pp.58 ~ 65.
- a.5.7 Craig R. *Structural Dynamics: An introduction to Computer Methods*. John Wiley & Sons, New York, ISBN 0 – 471 – 04499 – 7, 1981, pp.467 ~ 496.
- a.5.8 De M Smet, Liefoghe C. Dynamische analyse van flexibele robots. dissertation. PMA – KU Leuven, ref. 87E14, 1987, pp2.4 ~ 2.26 & 6.31 ~ 6.40.

A.6 章 数值模型与实验模型相结合

- a.6.1 Kidder R. Reduction of structural frequency equations. *AIAA Journal*, Vol. 11, No.6, 1973, pp 892.
- a.6.2 Guyan R. Reduction of stiffness and mass matrices. *AIAA Journal*, Vol. 3., No. 2, 1965, pp.380.
- a.6.3 O'Callahan J, Avitabile P. System equivalent reduction expansion process (SEREP). *Proceedings of the 7th International Modal Analysis Conference*, Las Vegas, Nevada,

1989, pp.29 ~ 37.

- a.6.4 O'Callahan J. A procedure for an improved reduced system (IRS) model. Proceedings of the 7th International Modal Analysis Conference, Las Vegas, Nevada, 1989, pp. 17 ~ 21.
- a.6.5 Lipkens J, Vandeuren U. The use of smoothing techniques for structural modification applications. Proceedings of the 12th International Seminar On Modal Analysis, Leuven, Belgium, 1987, paper C1 - 3.
- a.6.6 Allemang R, Brown D. A correlation coefficient for modal vector analysis. Proceedings of the 1th International Modal Analysis Conference, Orlando, Florida, 1982, pp. 110 ~ 116.
- a.6.7 Lieven N, Ewins D. Spatial correlation of mode shapes, the coordinate modal assurance criterion (COMAC). Proceedings of the 6th International Modal Analysis conference, Kissimmee, Florida, 1988, pp. 690 ~ 695.
- a.6.8 Heylen W. Correlation between experimental and model results. Proceedings of the 14th International Seminar On Modal Analysis, Leuven, Belgium, 1989.
- a.6.9 Gysin HP. Ein beitrage zur Verbesserung von Finite - Elemente - Modellen anhand modaler parameter. PhD. dissertation, ETH, Zürich, Switzerland, 1992.
- a.6.10 ESA/ESTEC, Lallement G, Link M, Caesar B. et al. Procedures for updating dynamic mathematical models. ESA contract report, 1991.
- a.6.11 Lammens S, Heylen W, Sas P. Error localisation methods; an overview of some evaluation results at K. U. Leuven. Proceedings of the 15th International Seminar On Modal Analysis, Leuven, Belgium, 1990, pp.39 ~ 49.
- a.6.12 Sidhu J, Ewins D. Correlation of finite element and modal test studies of a practical structure. Proceedings of the 2nd International Modal Analysis Conference, Orlando, Florida, 1984, pp.756 ~ 762.
- a.6.13 Fissette E, Ibrahim S, Stavrindis C Error location and updating of analytical dynamic models using a force balance method. Proceedings of the 6th International Modal Analysis Conference, Kissimmee, Florida, 1988, pp.1063 ~ 1070.
- a.6.14 Imregun M, Visser W. A review of model updating techniques. Shock and Vibration, Vol. 23, No.1, 1990.
- a.6.15 Caesar B. Update and identification of dynamic mathematical models. Proceedings of the 5th International Modal Analysis Conference, London, UK, 1987, pp.453 ~ 459.
- a.6.16 Heylen W, Sas P. Review of model optimisation techniques. Proceedings of the 5th International Modal Analysis Conference, London, UK, 1987, pp.1177 ~ 1182.
- a.6.17 Baruch M. Optimisation procedure to correct stiffness and flexibility matrices using vibration tests. AIAA Journal, Vol. 16, No.11, 1978, pp.1208 ~ 1210.
- a.6.18 Berman A, Nagy E. Improvement of a large analytical model using test data; AIAA Journal. Vol. 21, No. 8, 1983, pp. 1168 ~ 1173.
- a.6.19 Caesar B. Update and identification of dynamic mathematical models. Proceedings of the

- 11th International Modal Analysis Conference, Orlando, Florida, 1982, pp.394 ~ 401.
- a 6.20 Link M. Identification of physical system matrices using incomplete vibration test data. Proceedings of the 4th International Modal Analysis Conference, Los Angeles, California, 1986, pp.386 ~ 393.
 - a 6.21 Chen J, Kuo C, Garba J. Direct structural parameter identification by modal test results. Proceedings of the 24th Structural Dynamics and Materials Conference. 1983, pp.44 ~ 49.
 - a 6.22 Janter T. Construction oriented updating of dynamic finite element models using experimental modal data. Ph. D. dissertation, Katholieke Universiteit Leuven, Belgium, 1989.
 - a.6.23 Larsson P. Model updating based on forced vibrations. proceedings of the Chuo - K. U. Leuven - U.C. seminar, Tokyo, Japan, 1991.
 - a.6.24 Lammens S. Heylen W. Sas P. Model updating using frequency response functions; case studies. Proceedings of the International Conference Structural Dynamics Modelling Test, Analysis and Correlation, Milton Keynes, U.K., 1993, pp.195 ~ 204.
 - a.6.25 Lammens S. Frequency response based validation of dynamic structural finite element models. Ph.D. dissertation, Katholieke Universiteit Leuven, Belgium, 1995, 250 p.
 - a.6.26 Pascual R, Golinval J C, Razeto M. A frequency domain correlation technique for model correlation and updating. Proceedings of the 15th International Modal Analysis Conference, Orlando, Florida, 1997.
 - a.6.27 Carne T G, Dohrmann C R. A modal test design strategy for model correlation. Proceedings of the 13th International Modal Analysis Conference, Nashville, Tennessee, 1995
 - a.6.28 Kammer D C. Sensor placement for on - orbit modal identification and correlation of large space structures. AIAA Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 14, No.2, 1992, pp.251 ~ 259.
 - a.6.29 Hemez F M. Theoretical and experimental correlation between finite element models and modal tests in the context of large flexible space structures. Ph.D.dissertation, University of Colorado, 1993, 320p.
 - a.6.30 De Clerck J P, Avitable P; Development of several new tools for pre - test evaluation: proceedings of the 14th International Modal Analysis Conference, Dearborn, Michigan, 1996.
 - a.6.31 Schedlinski C, Link M. An approach to optimal pick - up and exciter placement. Proceedings of the 14th International Modal Analysis Conference, Dearborn, michigan, 1996.
 - a.6.32 Avitable P, haselton D, Moore J. Modal test reference selection using an SVD procedure. Proceedings of the 14th International Modal Analysis Conference, Dearborn, Michigan, 1996.
 - a.6.33 Williams R, Crowley J, Vold H. The multivariate Mode Indicator Function in Modal

Analysis. proceedings of the 3rd International Modal Analysis Conference, pp.66 ~ 70, 1985.

- a.6.34 N.CADA Modal/Analysis User manual. LMS International, Leuven, Belgium, pp.5/8 ~ 5/9.
- a.6.35 N. LMS CADA - X User Manual; Link. LMS International, Leuven, Belgium, pp.3/30 ~ 3/31.

B.1 章 实验设备

- b.1.1 J/T/Broch. Mechanical Vibration and Shock Measurements. Bruel & Kjaer, Naerum, Denmark, 1984.
- b.1.2 N. Modal Excitation Products. Zonic Corporation, Milford, Ohio, USA, 1981.
- b.1.3 N. Master Catalogue. Bruel & Kjaer, Naerum, Denmark, 1989.
- b.1.4 N. Long Stroke Shaker. APS, Carlsbad, California, USA.
- b.1.5 Change N. General Guide to ICP Instrumentation. PCB, Depew, New York, USA.
- b.1.6 Bentley J. principles of Measurement Systems. Longham, London & New York, 1983.
- b.1.7 Peters J, Cobin R. Kinematica en dynamica der werktuigen. Dept. of Mechanical Engineering, K. U. Leuven, 1981.
- b.1.8 N. Accelerometer Instruction & Selection Manual. Entran Devices Inc., Fairfield, N, J., USA, 1982.
- b.1.9 N. Vibration & Shock Sensor Selection Guide - Piezoelectric Accelerometers. PCB, Depew, New York, USA, 1993.
- b.1.10 N. VS 100 Operator's Manual. Ometron Limited, London, England, 1993.
- b.1.11 Kissinger C. Fibre Optic Lever Displacement Sensors and Automated Reflectance Compensation Improvements. Proceedings of FOCLAN 83. 1983.
- b.1.12 Wyckaert K, Magits H, Sas P. Electronic Speckle Interferometry an Finite Element Modelling for Very Small Vibrating Objects. Proceedings of the 13th International Seminar on Modal Analysis, Leuven, Belgium, 1988.

B.2 章 校准与设置

- b.2.1 Vanherck P. On the Calibration of Accelerometers. Proceedings of the 11th International Seminar on Modal Analysis, Leuven, Belgium, 1986.
- b.2.2 Lally R W. Trends in Transducer Technology. Proceedings of the 11th International Seminar on Modal Analysis, Leuven, Belgium, 1986.
- b.2.3 N. Hardware, Software, Systems and Ideas to Simplify Measurement of Dynamic Behavior. Quixote measurement dynamics inc., Cincinnati, Ohio, 1982.
- b.2.4 Lally R W. Testing the Behavior of Structures with Quartz Stress - Gage Sensors. PCB, Depew, New York.
- b.2.5 Hemez F. Theoretical and Experimental Correlation between Finite Element Models and Modal Test in the Context of Large Flexible Space Structures. Ph. D. dissertation,

Aerospace Engineering, University of Colorado, 1993, pp.262 ~ 278

- b.2.6 Kamme D. Sensor Placement for On - Orbit Model Identification and Correlation of Large Space Structures. AIAA Journal of Guidance, Control and Dynamics, Vol. 14, No.2, March - April, 1992, pp.251 ~ 259.
- b.2.7 Model 9090C Array Calibration System. The Modal Shop, Cincinnati, Ohio.

B.3 章 激励考虑

- b.3.1 Brown D, Carbor G, Ramsey K. Survey of excitation techniques applicable to the testing of automotive structures. Society of Automotive Engineers, International Automotive Congress and Exposition, 770029, March 1977.
- b.3.2 Heylen W, Sas P, Van H der Auweraer. Excitation considerations for experimental modal analysis. Proceedings of the 16th International Seminar on Modal Analysis in Firenze, Italy, PMA - K.U.Leuven, Belgium, September, 1991.
- b.3.3 Van H der auweraer. Development and evaluation of advanced measurement methods for experimental modal analysis. Ph.D.dissertation, PMA - K.U.Leuven, Belgium, ref. 87D3, June, 1987.
- b.3.4 Olsen N. Excitation functions for structural frequency response measurements. Proceedings of the 2nd International Modal Analysis conference. Orlando, Florida, Ed: Union College, Schenectady, New York, February, 1984, pp.894 ~ 902.
- b.3.5 Allemang R, Brown D, Rost R. Experimental modal analysis and dynamic component synthesis. Report for Air Force Wright Aeronautical Laboratories. Ohio, ref: AFWAL - TR - 87 - 3069, 1987.
- b.3.6 Peterson E, Ruser W, Mouch T. Modal excitation: force drop - off at resonance. Proceedings of the 8th International Modal Analysis Conference. Kissemmee, Florida, Ed: Union College, Schenectady, New York, February, 1990, pp.1226 ~ 1231.
- b.3.7 Halvorser W, Brown D. Impulse technique for structural frequency response testing. Sound and Vibration, November, 1977, pp.8 ~ 21.
- b.3.8 Coppolino R. Current techniques for modal survey testing. Proceedings: Institute of Environmental Science.
- b.3.9 Van H der Auweraer, Vanherck P, Sas P, Snoeys R. Accurate modal analysis measurements with programmed sine wave excitation. Mechanical Systems and Signal Processing, Vol.1, no.3, 1987, pp.301 ~ 313.
- b.3.10 Hunt D, Vold H, Williams R. Modal testing using modern sine excitation. Proceedings of the 8th International Modal Analysis Conference, Kissemmee, Florida, Ed: Union College, Schenectady, New York, February, 1990, pp. 1209 ~ 1213.
- b.3.11 Niedba N, Klusowski E. Optimal exciter placement and force vector tuning required for experimental modal analysis testing. ESA international conference on 'Spacecraft structures and mechanical testing', April, 1991.
- b.3.12 Van H Brussel, Mertens M, Van H der Auweraer, Leuridan J. Study of available tech-

niques to identify and characterise non – linearities by test. Esprit project 1561 report (task 6141), Proceedings of the 14th International Seminar on Modal Analysis, part2 (17), PMA – K.U.Leuven, Belgium, September, 1989.

- b.3.13 Mertens M, Van H der Auweraer, Vanherck P, Snoeys R. Detection of non – linear dynamic behaviour of mechanical structures. Proceedings of the 4th International Modal Analysis Conference, Los Angeles, California, Ed: Union College, Schenectady, New York, February, 1986. pp.712 ~ 719.
- b.3.14 Tomlinson G. Development in the use of the Hilbert transform for detecting and quantifying nonlinearity associated with frequency response functions. Mechanical Systems and Signal Processing, Vol.1, Nr.2, 1987, pp.151 ~ 171.
- b.3.15 Ewins D. Modal testing theory and practice. Chapt. 3, Research Studies Press Ltd., England, ISBN 0 86380 0173, 1984.
- b.3.16 Mertens M, Van H der Auweraer, Vanherck P, Snoeys R. The complex stiffness method to detect and identify non – linear dynamic behaviour of SDOF systems. Mechanical Systems and Signal Processing, Vol.3, no.1, 1989, pp.37 ~ 54.
- b.3.17 Wyckaert K. Vanherck P, Van Brussel H, Sas P. Parametric identification of non – linear mechanical systems in time and frequency domain. Proceedings of the 7th International Modal Analysis Conference, Las Vegas, Nevada, Ed: Union College, Schenectady, New York, February, 1986, pp.695 ~ 703.

B.4 章 实践中的模态参数估计

- b.4.1 Williams R, Crowley J, Vold H. The Multivariate Mode Indicator Function in Modal Analysis. Proceedings of the 3rd IMAC, pp.66 ~ 70, 1985.
- b.4.2 N. CADA Modal/Analysis Use Manual. LMS International, Leuven, Belgium, pp.5/8 ~ 5/9.

符号与说明

$\{a\}$: 模态 a 矩阵

$[A]$: $\begin{bmatrix} [0] & [M] \\ [M] & [C] \end{bmatrix}$; 扩展系统矩阵

$[A]_r$: 模态 r 的留数矩阵

$[A]$: 状态转移矩阵(状态-空间表述)

$\{b\}$: 模态 b 矩阵

$[B] = \begin{bmatrix} -[M] & [0] \\ [0] & [K] \end{bmatrix}$; 扩展系统矩阵

$[B]$: 输入矩阵(状态-空间表述)

$\{c\}$: 模态阻尼矩阵

C : 阻尼

$[C]$: 阻尼矩阵

C_c : 临界阻尼

$[C]$: 输出矩阵(状态-空间表述)

$[D]$: 直接输入-输出传输矩阵

f : 频率。单位: Hz, $1 \text{ Hz} = 2\pi \text{ rad/s}$

f_{\max} : 最大频率(Hz)

f_s : 采样频率(Hz)

$f(t)$: 时域之力

$F(p)$: 拉氏域之力

$F(j\omega)$: 频域之力

$\{F'\} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{F\} \end{Bmatrix}$

$G_{AA}(f)$: 信号 A 的自功率谱

$G_{AB}(f)$: 信号 A 和 B 的互功率谱

$h(t)$: 脉冲响应函数

$[h(t)]_{ik}$: $i \times k$ 维的 Hankel 矩阵

$H(p)$: 传递函数

$H(j\omega)$: 频响函数

$[I]$: 单位矩阵

j : 虚数单位, $j = \sqrt{-1}$

$\{k\}$: 模态刚度矩阵

k_r : 第 r 阶模态的模态刚度

K : 刚度

$[K]$: 刚度矩阵

$[L] = [\sqrt{Q}] [V]^T$, 模态参预因子矩阵
 $[LR]$: 下剩余项矩阵
 $[\sqrt{m}]$: 模态质量矩阵
 m_r : 第 r 阶模态的模态质量
 M : 质量
 $[M]$: 质量矩阵
 N : 自由度数
 N_a : 平均个数
 N_f : 频率点数, 谱线条数
 N_i : 输入个数
 N_m : 模态数
 N_o : 输出个数
 N_s : 时间采样个数, 亦即总频率线数
 p : 拉普拉斯变量
 Q_r : 模态比例换算因子
 q : 模态坐标
 rad : 弧度
 $R_{aa}(\tau)$: 信号 $a(t)$ 的自相关函数
 $R_{ab}(\tau)$: 信号 $a(t)$ 和 $b(t)$ 的互相关函数
 s : 秒
 t : 时间变量
 T : 采样周期, 时窗长度
 $\{u\}$: 修正参数
 $\{u(t)\}$: 输入向量(状态-空间表述)
 $[UR]$: 上剩余项矩阵
 $[V] = [\{\Psi\}_1 \cdots \{\Psi\}_N \{\Psi\}_1^* \cdots \{\Psi\}_N^*]$: 模态向量矩阵
 $x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t)$: 时域中的位移、速度和加速度
 $\{x(t)\}$: 状态向量(状态-空间表述)
 $X(p)$: 拉氏域位移
 $X(j\omega)$: 频域位移
 $\{y(t)\}$: 输出向量(状态-空间表述)
 $\{Y\} = \begin{Bmatrix} p\{X\} \\ \{X\} \end{Bmatrix}$
 Z : 动态刚度: $Z(p) = p^2 M + pC + K$
 α : 比例阻尼表式中的质量系数: $[C] = \alpha[M] + \beta[K]$
 β : 比例阻尼表式中的刚度系数: $[C] = \alpha[M] + \beta[K]$
 λ_r : 系统极点, $= \sigma_r + j\omega_r$ (rad/s)
 $[\sqrt{\Delta}]$: 由系统极点组成的对角矩阵

τ_r : 阻尼因子(rad/s)

ω : 频率变量(rad/s)

ω_r : 阻尼固有频率(rad/s)

Ω_r : 无阻尼固有频率(rad/s)

Ψ_i : 模态振型向量, 模态位移向量, 模态向量

$[\Psi] := [\{\Psi\}_1 \cdots \{\Psi\}_N]$

$[\Phi] := \begin{bmatrix} \lambda_1 \{\Psi\}_1 & \cdots & \lambda_N \{\Psi\}_N & \lambda_1^* \{\Psi\}_1^* & \cdots & \lambda_N^* \{\Psi\}_N^* \\ \{\Psi\}_1 & \cdots & \{\Psi\}_N & \{\Psi\}_1^* & \cdots & \{\Psi\}_N^* \end{bmatrix}$

ζ_r : 临界阻尼分数, 阻尼比

$[\]$: 矩阵

$[\diagup x \diagdown]$: 对角矩阵

$\{\}$: 列向量

$\langle \rangle$: 行向量

a : 表示解析参数

u : 表示未修正参数

x : 表示实验参数

T: 表示矩阵转置(上标)

$*$: 表示复数共轭(上标)

$+$: 表示广义逆或伪逆(上标)

-1 : 表示逆(上标)

$|$: 表示矩阵的行列式, 标量的绝对值

$\| \ \|$: 范数

